Aufgabe 1a)

$$\dfrac{\dfrac{<(\mathit{while}\ \mathbf{true}\ \mathit{skip}),\sigma_0>\to t_1 \quad <\mathbf{true},\sigma_0>\to \mathbf{true}}{<(\mathit{while}\ \mathbf{true}\ \mathit{skip})\vee\mathbf{true},\sigma_0>\to\mathbf{true}}}{<X:=(\mathit{while}\ \mathbf{true}\ \mathit{skip})\vee\mathbf{true},\sigma_0>\to\sigma_0[true/X]}$$

Aufgabe 2a)

$$\dfrac{<X:=0,\sigma_0>\to\sigma_1 \quad <\mathit{if}\ (Y<=0)\ \mathit{then}\ (X:=0;Y:=0)\ \mathit{else}\ (\mathit{while}\ B\ C),\sigma_1>\to}{<P,\sigma_0>\to\sigma'}$$

$$\dfrac{<0,\sigma_0>\to 0}{<X:=0,\sigma_0>\to\sigma_1} \quad \text{wobei } \sigma_1=\sigma_0[0/X]$$

$$\dfrac{<(Y<=0),\sigma_1>\to\mathbf{false} \quad <\mathit{while}\ B\ C,\sigma_1>\to\sigma'}{<\mathit{if}\ (Y<=0)\ \mathit{then}\ (X:=0;Y:=0)\ \mathit{else}\ (\mathit{while}\ B\ C),\sigma_1>\to\sigma'}$$

$$\dfrac{<Y,\sigma_1>\to 3 \quad <0,\sigma_1>\to 0}{<(Y<=0),\sigma_1>\to\mathbf{false}}$$

$$\dfrac{<(Y>0),\sigma_1>\to\mathbf{true} \quad <C,\sigma_1>\to\sigma_2 \quad <\mathit{while}\ B\ C,\sigma_2>\to\sigma'}{<\mathit{while}\ B\ C,\sigma_1>\to\sigma'}$$

$$\dfrac{<Y,\sigma_1>\to 3 \quad <0,\sigma_1>\to 0}{<(Y>0),\sigma_1>\to\mathbf{true}}$$

$$\dfrac{<X:=X+Y,\sigma_1>\to\sigma_3 \quad <Y:=Y-1,\sigma_3>\to\sigma_2}{<C,\sigma_1>\to\sigma_2}$$

$$\dfrac{<X+Y,\sigma_1>\to 3}{<X:=X+Y,\sigma_1>\to\sigma_3} \quad \text{wobei } \sigma_3=\sigma_1[3/X]$$

Es ist ja $\sigma_1 = \sigma_0[0/X]$ und so

$$\frac{< X, \sigma_1 > \to 0 \qquad < Y, \sigma_1 > \to 3}{< X + Y, \sigma_1 > \to 3}$$

$$\frac{< Y - 1, \sigma_3 > \to 2}{< Y := Y - 1, \sigma_3 > \to \sigma_2} \quad \text{wobei } \sigma_2 = \sigma_3[2/Y]$$

$$\frac{< Y, \sigma_3 > \to 3 \qquad < 1, \sigma_3 > \to 1}{< Y - 1, \sigma_3 > \to 2}$$

$$\frac{< (Y > 0), \sigma_2 > \to \mathbf{true} \qquad < C, \sigma_2 > \to \sigma_4 \qquad < \mathit{while}\ B\ C, \sigma_4 > \to \sigma'}{< \mathit{while}\ B\ C, \sigma_2 > \to \sigma'}$$

$$\frac{< Y, \sigma_2 > \to 2 \qquad < 0, \sigma_2 > \to 0}{< (Y > 0), \sigma_2 > \to \mathbf{true}}$$

$$\frac{< X := X + Y, \sigma_2 > \to \sigma_5 \qquad < Y := Y - 1, \sigma_5 > \to \sigma_4}{< C, \sigma_2 > \to \sigma_4}$$

$$\frac{< X + Y, \sigma_2 > \to 5}{< X := X + Y, \sigma_2 > \to \sigma_5} \quad \text{wobei } \sigma_5 = \sigma_2[5/X]$$

Es ist ja $\sigma_2 = \sigma_3[2/Y] = \sigma_1[3/X][2/Y]$ und so

$$\frac{< X, \sigma_2 > \to 3 \qquad < Y, \sigma_2 > \to 2}{< X + Y, \sigma_2 > \to 5}$$

$$\frac{< Y - 1, \sigma_5 > \to 1}{< Y := Y - 1, \sigma_5 > \to \sigma_4} \quad \text{wobei } \sigma_4 = \sigma_5[1/Y]$$

$$\frac{< Y, \sigma_5 > \to 2 \qquad < 1, \sigma_5 > \to 1}{< Y - 1, \sigma_5 > \to 1}$$

$$\frac{<(Y>0),\sigma_4>\to \mathbf{true} \quad <C,\sigma_4>\to\sigma_6 \quad <\mathit{while}\ B\ C,\sigma_6>\to\sigma'}{<\mathit{while}\ B\ C,\sigma_4>\to\sigma'}$$

$$\frac{<Y,\sigma_4>\to 1 \quad <0,\sigma_4>\to 0}{<(Y>0),\sigma_4>\to \mathbf{true}}$$

$$\frac{<X:=X+Y,\sigma_4>\to\sigma_7 \quad <Y:=Y-1,\sigma_7>\to\sigma_6}{<C,\sigma_4>\to\sigma_6}$$

$$\frac{<X+Y,\sigma_4>\to 6}{<X:=X+Y,\sigma_4>\to\sigma_7} \quad \text{wobei } \sigma_7=\sigma_4[6/X]$$

Es ist ja $\sigma_4=\sigma_5[1/Y]=\sigma_2[5/X][1/Y]$ und so

$$\frac{<X,\sigma_4>\to 5 \quad <Y,\sigma_4>\to 1}{<X+Y,\sigma_4>\to 6}$$

$$\frac{<Y-1,\sigma_7>\to 0}{<Y:=Y-1,\sigma_7>\to\sigma_6} \quad \text{wobei } \sigma_6=\sigma_7[0/Y]$$

$$\frac{<Y,\sigma_7>\to 1 \quad <1,\sigma_7>\to 1}{<Y-1,\sigma_7>\to 0}$$

$$\frac{<(Y>0),\sigma_6>\to \mathbf{false}}{<\mathit{while}\ B\ C,\sigma_6>\to\sigma'} \quad \text{wobei dann } \sigma'=\sigma_6$$

$$\frac{<Y,\sigma_6>\to 0 \quad <0,\sigma_6>\to 0}{<(Y>0),\sigma_6>\to \mathbf{false}}$$

Damit ist $\sigma'(X)=\sigma_6(X)=\sigma_7[0/Y](X)=\sigma_4[6/X][0/Y](X)=6$.