GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Einführung in die Funktionale Programmierung:

Funktionale Kernsprachen

Zufall Programmieren

Prof. Dr. Manfred Schmidt-Schauß

WS 2025/26

Stand der Folien: 25. November 2025

Übersicht

1. Probability, functional
2. Verteilungen (eines Programms)
3. Korrekte Programmtransformationen / Optimierungen

Probability und Funktionale Programmierung

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Ideen

- Einführung einer Funktion:
  `coin` die einem Münzwurf entspricht
  in einer lazy funktionalen Programmiersprache
- Mit programmierbarer Wahrscheinlichkeit;
- in KFPTS: Zahlen und andere Datentypen vorhanden
  Rekursive Funktionen sind programmierbar

Probability und Funktionale Programmierung

Sichtweise: Was ist ein (probabilistisches) Programm?

- Ein Programm bzw. eine Funktion modelliert ein Zufalls-Experiment.
- Beispiele:
  - fairer Münzwurf
  - Würfeln mit einem Würfel mit 6 Seiten.
  - komplexeres Experiment: Programm mit mehreren Münzwürfe, Würfeln usw.
    Würfle solange bis eine 6 erscheint usw. . .

! verschiedene Ausführungen eines (probabilistischen) Programms können verschiedene Ergebnisse haben.

Basis - Zufalls - Funktion

`coin` p s t

- p: Wahrscheinlichkeit für s
  $0 \leq p \leq 1$ rationale Konstante.
  (Man kann auch beliebige rationalwertige Ausdrücke zulassen)
- s, t sind die beiden möglichen Ausdrücke die als Fortsetzung gewählt werden können.
- Auswertung von `coin` p s t ist wenn $0 \leq p \leq 1$:
  - s mit Wahrscheinlichkeit p
  - t mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$

  und dann weitere Auswertung.
  Wenn $p < 0$, dann wird $p = 0$ angenommen.
  Wenn $p > 1$, dann wird $p = 1$ angenommen.

`coin` gibt es nicht in Haskell!
Es gibt implementierte Simulationen einer einfacher Variante...

Probabilistische Ausführung von `coin`

- Auswertung von `coin` $p \; s \; t$:
- Es wird **nicht-deterministisch** s oder t ausgewählt. D.h. Jede Ausführung kann mal s oder auch t wählen.
- Was ist mit der Wahrscheinlichkeit p?
- Wahrscheinlichkeiten spielen nur bei **mehrmaliger** Auswertung eine Rolle:
  s mit Wahrscheinlichkeit p, t mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.

- Ein Programm P hat eine theoretische Verteilung der Ergebnisse (inkl. Nichtterminierung)
- Viele Ausführungen des Programms nähern diese Verteilung an. (Grenzwert-Satz)
- Eine Ausführung des Programms kann auch nicht-terminieren:
  D.h. die Verteilung zu P beinhaltet eine Wahrscheinlichkeit für Nichtterminierung.

KFPTSProb: Syntax mit: coin, let und Integer

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{Expr} & ::= & V \mid \lambda V.\mathbf{Expr} \mid (\mathbf{Expr}_1\ \mathbf{Expr}_2) \\
& \mid & (c_i\ \mathbf{Expr}_1\ \ldots\ \mathbf{Expr}_{\mathrm{ar}(c_i)}) \\
& \mid & (\mathtt{case}_{\mathtt{Typ}}\ \mathbf{Expr}\ \mathtt{of}\ \{\mathbf{Pat}_1 \to \mathbf{Expr}_1; \ldots; \mathbf{Pat}_n \to \mathbf{Expr}_n\}) \\
& \mid & SK \text{ wobei } SK \in \mathcal{SK} \\
& \mid & (let\ V_1 = \mathbf{Expr}_1, \ldots, V_n = \mathbf{Expr}_n\ \mathtt{in}\ \mathbf{Expr}) \\
& \mid & 0 \mid 1 \mid 2 \ldots \mid + \mid - \mid * \\
& \mid & (\mathtt{coin}\ \mathbf{Q}\ \mathbf{Expr}_1\ \mathbf{Expr}_2) \\
\mathbf{Pat}_i & ::= & (c_i\ V_1 \ldots V_{ar(c_i)}) \text{ wobei die Variablen } V_i \text{ alle verschieden sind.} \\
\mathbf{Q} & ::= & \text{rationale Zahl}
\end{array}
$$

Pro Superkombinator SK gibt es eine Superkombinatordefinition:
$SK\ V_1\ \ldots\ V_n = \mathbf{Expr}$ mit $n = ar(SK)$

Probabilistisches Programm, Verallgemeinerungen

Mögliche Verallgemeinerungen zu Q in :
$(\texttt{coin}\ \mathbf{Q}\ \mathbf{Expr}_1\ \mathbf{Expr}_2)$
(nicht Teil von `KFPTSProb`:

- $\mathbf{Q}$ kann Expression sein der zur rational auswertet (deterministisches Sub-Programm ohne Bezug zum restlichen Programm).
- $\mathbf{Q}$ kann normale Programmvariable sein, mit beliebiger Benutzung (d.h. könnte Ergebnis eines probabilistischen Programms sein, evtl. sogar rekursiv. . . ?)

Diese Verallgemeinerungen der Sprache sind i.a.
von aktuellen Untersuchungen und Analysen nicht abgedeckt.

Probabilistisches Programm

Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{main} & = & \mathsf{a} + \mathsf{b} \\
\texttt{a} & = & \texttt{coin}\ 0.1\ 10\ 20 \\
\texttt{b} & = & \texttt{coin}\ 0.25\ 3\ 4
\end{array}
$$

Programm

- Ist ein Modell für ein Zufalls-Experiment
- Man kann diese Experimente kombinieren (pogrammieren)
- Man kann das Programm optimieren bzw. transformieren in ein äquivalentes Programm
- Programm ausführen entspricht einem Experiment
- Programme kombinieren: komplexere Experimente.

Probabilistische call-by-need Auswertung

Auswertung ist **call-by-need** in `KFPTSProb`.
(Normalordnungs-Reduktion mit Sharing)
Eine detaillierte exakte Definition siehe Literatur zu n.d. FP-calc.

Call-by-need Details und Prinzipien

1. Der Normalordnungs-Redex wird zuerst bestimmt.
2. Das `let` ist normalerweise mit mehreren Bindungen und rekursiv
3. Sharing wird modelliert durch let-Referenzen.
4. Wenn rekursives let:
   genaue Reduktionsregeln sind leider einige ...
   und Auswertung und Analyse sind komplizierter
5. Im Weiteren verwenden wir nur **nicht-rekursives let**

Probabilistische call-by-need Auswertung

Exkurs: call-by-need Auswertung

1. let-Ausdrücke im Fokus (d.h. im Normalordnungs-Kontext) werden "nach oben" geschoben wenn nötig, vereinigt usw.
2. Bei LBeta und Case-Reduktion wird Einsetzung geshared (mittels let)
3. Beta Reduktion ist mit sharing:
   $(\lambda x.s)\ t \quad \rightarrow \quad \texttt{let}\ x = t\ \texttt{in}\ s$
4. Echt (textuell) kopiert (d.h. verdoppelt) werden dürfen nur Abstraktionen $\lambda x.s$ und einfachste Konstruktorapplikationen der Form $c\ x_1 \ldots, x_n$
5. Man darf zwei textuell getrennte Applikationen und `coin`-Aufrufe nicht mittels einer Programmtransformation "sharen".

Probabilistische call-by-need Auswertung

Einige Reduktionsregeln:

$(\lambda x.s)\ t \xrightarrow{lbeta} \texttt{let}\ x = t\ \texttt{in}\ s$

$(\texttt{case}\ (c\ s_1\ s_2)\ \texttt{of}\ (c\ x_1\ x_2) \to t; \ldots) \xrightarrow{lcase} \texttt{let}\ x_1 = s_1; x_2 = s_2\ \texttt{in}\ t$

$((\texttt{let}\ x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\ \texttt{in}\ s)\ t) \xrightarrow{let} (\texttt{let}\ x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\ \texttt{in}\ (s\ t))$

$((\texttt{let}\ x_1 = (\texttt{let}\ y_1 = r_1, \ldots, y_m = r_n\ \texttt{in}\ s_1), x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n\ \texttt{in}\ r))$
$\xrightarrow{let} (\texttt{let}\ y_1 = r_1, \ldots, y_m = r_n,\ x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n\ \texttt{in}\ r$

- Es gibt noch weitere Regeln um let-Bindungen nach oben zu verschieben

Probabilistische call-by-need Auswertung, Beispiel

```
let y = (coin 0.75 1 2); z = (coin 0.25 3 4) in
   let x = (coin 0.5 y z) in x*y+z
```

$\longrightarrow$

```
let y = (coin 0.75 1 2); z = (coin 0.25 3 4),
   x = (coin 0.5 y z) in x*y+z
```

$\longrightarrow$ x zuerst; Wahl: wird zu y. $p = 0.5$

```
let y = (coin 0.75 1 2); z = (coin 0.25 3 4),
  x = y in x*y+z
```

$\longrightarrow$ y auswerten (diesmal rechte Seite), $p = 0.5 * 0.25$

```
let y = 2; z = (coin 0.25 3 4),
  x = y in x*y+z
```

$\longrightarrow$ z auswerten, $p = 0.5 * 0.25 * 0.25$

```
let y = 2; z = 3,
  x = y in x*y+z
```

$\longrightarrow$ 7,   Wahrscheinlichkeitsmaß: $p = 0.5 * 0.25 * 0.25 = 1/32$

Prob cb-need Auswertung, Beispiel Forts.

Anmerkungen

- Es kommen Bindungen $x = y$ vor:
  $\Longrightarrow$ Kalkülregeln verfeinern, damit das abgedeckt ist.
- Es gibt 8 mögliche Ausführungen. Wahrscheinlichkeiten:
  $\{0.25, 0.75\} * \{0.25, 0.75\} * \{0.5, 0.5\}$
- Nur eine Möglichkeit ist auf der Folie.
- Auswertung hängt vom Ausdruck $x * y + z$ ab.
- Auswertung hängt auch vom Zufall ab:
  Wenn Ausdruck $= x$, dann wird y oder z ausgewertet.

Monte Carlo Simulation: Programmierbar

Gegeben; geschlossener Ausdruck s in `KFPTSProb`.

1. Werte {einen Ausdruck } 1000 mal aus.
2. Mache Statistik über alle Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten

Monte Carlo Simulation; Beispiel

- Liste der Länge n:
  `list = [coin 0.5 0 1,...,coin 0.5 0 1]`
- Berechne `m = sum list`. (normalerweise in etwa $n/2$).
- Wenn n sehr groß ist wird $|m/n - 0.5|$ immer kleiner.

Technisches Problem, wenn man es in `KFPTSProb` macht:

Obige Programmiertechnik verlangt, dass man
n mal `(coin 0.5 0 1)` im Programm hinschreibt!

Simulationen mit parametrisierter Anzahl.

- n Münzwürfe sollen gemacht werden:
- `listCoins = repeat n (\x. (coin 0.5 0 1))`
  Trick: **Abstraktionen** zu kopieren statt zu sharen ist korrekt
- Berechne Summe aller Ergebnisse:
  `sum (map (\x-> x ()) listCoins)`
- Auswertung kopiert die Abstraktion `(\x. (coin 0.5 0 1))`
- Programm enthält nur einen Ausdruck `(coin 0.5 0 1)`!

Grenzwertsatz: Je mehr Versuche, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert aller Ergebnisse sehr nah bei 0.5 ist.

Probabilistischer Berechnungsbaum

Sei P ein `KFPTSProb` Programm.
Berechnung aller Möglichkeiten erzeugt einen Baum!

- Wurzelknoten ist das Programm
- Die Kanten sind die normal-order Reduktionen, markiert mit den Wahrscheinlichkeiten
- Wenn `(coin p 0 1)` ausgewertet wird, hat der Knoten zwei Kinder.
- Die Blätter sind WHNFs.

Probabilistischer Baum zu einem Programm P hat Möglichkeiten:

- kann endlich sein
- kann unendlich groß sein
- kann unendliche lange Äste haben

Der **Wahrscheinlichkeitbeitrag des Ergerbnisses an einem Ast**: ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten an seinen Kanten.

Multi-Verteilung von P

Sei P ein `KFPTSProb` Programm.

Definition: Die Multi-Verteilung zu P ist

Menge der Paare (s, p) zu allen Ästen.

- s ist eine WHNF am Ende eines Astes,
- p die Wahrscheinlichkeit des Astes

Terminierungs-Wahrscheinlichkeit $=$
Summe aller Wahrscheinlichkeiten in der Verteilung.
Terminierungs-Wahrscheinlichkeit $EC(P)$ von P:
$=$ Summe aller Wahrscheinlichkeiten aller endlichen Äste
Nichtterminierungs-Wahrscheinlichkeit von P:
Summe aller Wahrscheinlichkeiten aller unendlichen Äste

Simulationsprogramme dazu mit Multi-Verteilungen sind einfacher als mit Verteilungen
(insbesondere bei unendlichen Multi-Verteilungen.)

Nichtterminierung und Wahrscheinlichkeit

Achtung: Es gibt programmierte Zufallsexperimente,
deren (rekursive) Ausführung
mit positiver Wahrscheinlichkeit
nicht terminiert
und die keine programmierte Endlos-Schleife haben

(Ein Beispiel kommt noch)

Verteilung von P

Sei P ein `KFPTSProb` Programm.

Berechnung der Verteilung

Eine **Verteilung** $EV_P(.)$ zum Programm P : `int`

- $EV_P(n) =$ Wahrscheinlichkeit, dass P die Zahl n berechnet.
- $EV_P(\perp)$: Wahrscheinlichkeit der Nichtterminierung von P

Es gilt: $(\sum_i EV_P(i)) + V_P(\perp) = 1$

Beispiel: Würfel

Fairer 6er Würfel

$$\texttt{wuerfel} \;=\; \texttt{coin}\ (1/6)\ 1\ (\texttt{coin}\ (1/5)\ 2\ (\texttt{coin}\ (1/4)\ 3\ (\texttt{coin}\ (1/3)\ 4\ (\texttt{coin}\ (1/2)\ 5\ 6)))))$$

Begründung dass das richtg ist:

- Münzwurf: Prob $1/6$ für 1 und $5/6$ der Rest.
- Dann: Prob $5/6 * 1/5$ für 2: d.h.
  $1/6$ für 2 und $4/6$ für den Rest.
- usw.

$EV_P(\texttt{wuerfel}) = \{i \mapsto 1/6 \mid i = 1, \ldots, 6\}$

Verallgemeinerung: Zufälliges Element aus Liste

Faires Ziehen eines Listenelements aus `l`

```
gVert l      =  if (length l) == 0 then bot else
             =     gV l (length l)
gV [x] 1     =  x
gV (x:r) k   =  coin (1/k) x (gV r (k-1))
```

Beispiel: Zufallsprogramm zu diskreter Verteilung

Diskrete Verteilung, Programm verallgemeinert

$[(w_1, p_1), \ldots (w_n, p_n)]$

$$\begin{array}{lcl} \texttt{wuerfel} & = & \texttt{coin}\ (p_1)\ w_1 \\ & & \quad (\texttt{coin}\ (p_2/(1-p_1))\ w_2 \\ & & \qquad (\texttt{coin}\ (p_3/(1-p_1-p_2))\ w_2 \\ & & \ldots \end{array}$$

Erwartungswert

Definition

Falls alle Ergebnisse Integer sind:
Erwartungswert $= \sum_i p_i * w_i$,
wenn $[(w_i, p_i), i = 1 \ldots, n]$ die Verteilung für Integer i ist.

Erwartungswert beim 6-Würfel ist $\sum_i i * p_i$, wobei
$[(1, 1/6), (2, 1/6), \ldots, (6, 1/6)]$
die Verteilung für den 6-Würfel ist.
Der Erwartungswert ist dann $1/6 * (\sum_{i=1}^{n} \; i) = 3.5$.

Vergleich der Auswertungsreihenfolgen

Verhalten bei beta-Reduktion:

- Call-by-value: Vor Reduktion muss das Argument ausgewertet werden.
- Call-by-name: Die Argumente werden bei beta-Reduktion in den Rumpf kopiert.
- Call-by-need: Die Argumente werden bei beta-Reduktion in den Rumpf kopiert, aber sind "geshared".

Resultate	call-by-value	call-by-need	call-by-name
$(\lambda x.1)\ \bot$	terminiert nicht	1	1
let w = coin 1 2 in w+ w	2,4	2,4	2,3,4

Wir benutzen in **KFPTSProb**:

Call-by-need Auswertung, wie in Haskell

Ein Beispiel mit unendlich vielen Werten

Erzeuge Werte 1,2,3,4,...
mit den Wahrscheinlichkeiten 0.5, 0.25, 2^{-3}, 2^{-4},....

$$\begin{array}{lcl} \texttt{result} & = & \texttt{numbers}\ 1 \\ \texttt{numbers}\ n & = & \texttt{coin}\ 0.5\ n\ (\texttt{numbers}\ (n+1)) \end{array}$$

- Man erhält $EC(\texttt{result}) = 1$, d.h. Terminierung mit Wahrscheinlichkeit 1.
- Die Verteilung $EV(\texttt{result})$ ist: $\lambda i.2^{-i}$.
- Das Programm kann unendlich lange laufen, wenn $coin$ immer falsch fällt, aber die Wahrscheinlichkeit dafür ist 0.

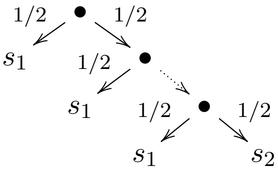
Nichtterminierung mit Wahrscheinlichkeit > 0

Beispiel-Programm das mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht terminiert. (K ist eine Abstraktion $\lambda x.\lambda y.x$.)

$$
\begin{array}{l}
s := \texttt{let}\ \mathit{cprob}\ i\ x\ y = \mathit{if}\ i = 0\ \mathit{then}\ x\ \mathit{else} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \texttt{co}\mathit{in}\ 0.5\ (\mathit{cprob}\ (i{-}1)\ x\ y)\ \ y, \\
\qquad\quad \mathit{gen}\ i = \mathit{cprob}\ i\ K\ (\mathit{gen}\ (i{+}1)) \\
\qquad \texttt{in}\ \mathit{gen}\ 2
\end{array}
$$

Die Graphiken zeigen die Verzweigung

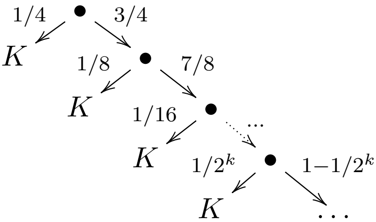
$\mathit{cprob}\ i\ s_1\ s_2$:



D.h., $\mathit{cprob}\ i\ s_1\ s_2$ wird mit Wahrscheinlichkeit $1/2^i$ zu s_2 und mit Wahrscheinlichkeit $(1 - 1/2^i)$ zu s_1.

Nichtterminierung mit prob > 0, Forts.

$gen\ 2:$



Der Aufruf $(gen\ 2)$ wird mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ zu K
und mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ geht es dann mit $(gen\ 3)$ weiter.

Terminierung von `(gen 2)` mit
$1/4 + 3/4 * (1/8 + 7/8 * (1/16 + \ldots) \ldots) \ldots.$
Grobe Abschätzung:
Terminierung mit Wahrscheinlichkeit $< 1/4 + 1/8 + \ldots = 1/2$.

Nichtterminierung mit prob > 0, Forts.

- Exakt: (`gen 2`) terminiert mit Wahrscheinlichkeit $5/12$, also: (`gen 2`) terminiert nicht mit Wahrscheinlichkeit $7/12$, d.h. $> 50\%$.
- $\Rightarrow$ Es gibt Programme, die mit $W > 0$ nicht terminieren,
  - ohne eine direkte Schleife, nur durch den rekursiven Ablauf!
  - Und jeder rekursive Aufruf hat positive Erfolgswahrscheinlichkeit

Vergleich mit nicht-deterministischen FPS:

Die ND-Terminierungs-Begriffe (ohne Probability)

- **may-convergent**: Der Ausdruck hat eine Möglichkeit mit WHNF zu terminieren.
- **may-divergent**: Der Ausdruck hat eine Möglichkeit zu divergieren (d.h. unendlich oder jedes Ende ist keine WHNF)
- **must-convergent**: Jede Reduktionsfolge endet mit einer WHNF.
- **must-divergent**: keine Reduktionsfolge endet mit einer WHNF.
- **should-convergent**: Jeder Reduktionsnachfolger ist may-convergent.

Unterschied ND vs. Probabilistisch

- Es gibt should-konvergente geschlossene Ausdrücke, die mit mehr als 0.5 Wahrscheinlichkeit nicht terminieren, (Aber < 1).
- Es gibt may-divergente Ausdrücke, die mit Wahrscheinlichkeit 1 konvergieren.

Programmtransformationen in `KFPTSProb`

Was bedeutet **gleiches Programm** in `KFPTSProb` ?

Dazu:	Genaue Festlegung der Sprache notwendig! Und eine genaue Festlegung der Auswertung (genauer: der operationalen Semantik)
Begriff:	semantisch gleiche Programme bzw. semantisch gleiche Unter-programme

Programmtransformationen in `KFPTSProb`

Basisbegriff: *EC*: (expected convergence)
Erwartungswert für Terminierung (bzw. Konvergenz)

Definition

Für `KFPTSProb`-Ausdrücke s, t :
$s \sim_{c,P} t$ wenn für alle Kontexte C: $\mathit{EC}(C[s]) = \mathit{EC}(C[t])$,
d.h. wenn die Konvergenzwahrscheinlichkeit sich nicht ändert, wenn man s durch t ersetzt oder umgekehrt. Mit Kontext C sind `KFPTSProb`-Programme gemeint, die eine Leerstelle haben.

- Man kann ziemlich viele Programm-Äquivalenzen und -Transformationen in `KFPTSProb` als korrekt nachweisen.
- d.h. man kann Programme umformen, weiter auswerten usw., mittels korrekter Transformationen!
- Natürlich darf man bei Transformationen (z.B. im Compiler)) nicht die Münzwürfe ausführen.

Verteilungsäquivalenz in `KFPTSProb`

Definition

Zwei offene Programme P, Q mit main' sind äquivalent, wenn für jedes Programm R die Konkatenation $P|R$ (mit main) und $Q|R$ die gleiche Wahrscheinlichkeit der Konvergenz haben.

Welche Programmtransformationen sind korrekt?

Man kann zeigen, dass in `KFPTSProb` folgende korrekt sind:

- LBeta-Reduktion
- LCase-Reduktion

Vertauschung der Ausdrücke in `coin` Ausdrücken ist auch korrekt!

Verteilungsäquivalenz in KFPTSProb

Sei $\texttt{KFPTSProb}^{mt}$ monomorph getypte Variante von KFPTSProb.
Dann gilt:
• Für Programme vom Typ Int: Kontextuelle Äquivalenz in $\texttt{KFPTSProb}^{mt}$ ist äquivalent zu Verteilungsäquivalenz.

Das bedeutet: Wenn die Sprache einfach getypt ist,
z.B. $+$: $\texttt{int} \to \texttt{int} \to \texttt{int}$.
Dann sind geschlossene Ausdrücke p_1 und p_2 (mit gleichem Typ und `int` als Ergebnistyp)
kontextuell gleich
gdw. beide die gleiche Verteilung auf $0, 1, 2, \ldots$ haben.

Probabilistische Berechenbarkeit?

- Es gibt den Begriff: *probabilistische Turingmaschine*
  Mit einem Extra-Befehl der einen Münzwurf ausführt, und dann entsprechend weitermacht
- Eine (probabilistische) Programmiersprache (Berechnungsmodell) ist probabilistisch Turing-vollständig, wenn es möglich ist, für jede prob-TM: jede Berechnungen zu simulieren (inkl. der Wahrscheinlichkeiten).
- (Ohne Nachweis):
  Es gilt: `KFPTSProb` ist probabilistisch Turing-vollständig.

Fazit und Ausblick

Welche weiteren Vorteile hat das lazy (call-by-need) probabilistic Programmieren?

- Ein Programm ist ein programmiertes Zufallsexperiment.
- Die Programme sind unmittelbar geeignet zur zufälligen Auswertung mittels Monte-Carlo Methode.
- Programmtransformationen / Optimierungen sind korrekt, wenn sie die Terminierungs-Wahrscheinlichkeit (in allen Kontexten) erhalten.
- Man kann in nicht zu komplizierten Fällen deren Konvergenz-Wahrscheinlichkeit oder die Verteilung direkt bestimmen, ohne Monte-Carlo Methoden zu verwenden.
- Es gibt eine umfangreiche Forschung und Literatur zur probabilistischen Programmierung, wobei es zu lazy funktionalen Programmiersprachen noch nicht soviele Untersuchungen gibt.
- Polymorph getypt und Probability: Vermutlich geht es (fast) genauso. Aber; Nachweise/ Beweise?: Zu viele Details und Varianten sind zu beachten. . . .

Haskell Bibliothek probability

Die Haskell Bibliothek `.../packages/probability` hat den Ansatz, aus gegebenen diskreten Verteilungen weitere diskrete Verteilungen zu Zufallsprozessen zu berechnen.
Das hat Vor- und Nachteile:

- Man kann weitere Zufallsprozesse zusammensetzen und berechnet direkt deren Verteilung. z.B. die Verteilung der Ergebnisse wenn man zwei Würfel wirft.
- Es gibt weitere (auch direkt programmierbare) Kombinationsmöglichkeiten von Zufallsvariablen, bzw. deren Verteilungen.
- Diese Sichtweise ist etwas anders als die direkte (rekursive) Programmierung von Zufallsexperimenten. Es ist damit leichter, Verteilungen zu berechnen, aber es ist (. . .) nicht so allgemein wie die direkte Programmierung.

Haskell Bibliothek probability

Warum Multiverteilungen?

- Die Berechnung von Verteilungen liefert erstmal eine "Multi-Verteilung", d.h. zu einem x können mehrere (evtl. unendlich viele) Einträge $(x, p_1), (x, p_2)$ in der "Verteilung" sein.
- Zum Beispiel die unendliche Verteilung V:
  $[(1, 0.5), (2, 1/4), (3, 1/8), \ldots]$
  liefert für das Produkt von zwei Zahlen:
  1*1 mit $1/4$, aber für 2 als Ergebnis zwei Einträge:
  $(1 * 2, 1/8)$ und $(2 * 1, 1/8)$ zusammen $(2, 1/4)$.
- Multiverteilungen sind einfacher zu handhaben beim Programmieren

Literatur-Auswahl (Vorsicht..)

- (Übersichtsartikel) Ugo Dal Lago. 2020. On Probabilistic Lambda-Calculi. Cambridge University Press, 121-144. https://doi.org/10.1017/9781108770750.005
- (Artikel zum Anwendungspotential) Goodman, N. D., Tenenbaum, J. B., & Gerstenberg, T. (2014). Concepts in a probabilistic language of thought. Center for Brains, Minds and Machines (CBMM).
- (Konferenzartikel zu call-by-need probabilistic programs) D. Sabel, M. Schmidt-Schauß, and L. Maio. 2022. Contextual Equivalence in a Probabilistic Call-by-Need Lambda-Calculus. In 24th PPDP 2022, Tbilisi, Georgia. ACM, New York, NY, USA, 15 pages. https://doi.org/10.1145/3551357.3551374
- (Implementierung in Haskell) Luca Maio, The Probabilistic Lambda Calculus with Call-by-Need-Evaluation, thesis, LMU München, 2021
- Martin Erwig, Steve Kollmannsberger, J. Funct. Program. 16(1): 21–34 (2006) web.engr.oregonstate.edu/(tilde)erwig/papers/PFP_JFP06.pdf

Literatur-Auswahl 2.

- Artikel zur Programmäquivalenz: in einer probabilistischen, getypten funktionalen Programmiersprache, analog zu `KFPTSprob` (2023)
  M. Schmidt-Schauß, D. Sabel, Program equivalence in a typed probabilistic call-by-need functional language, J. Log. Algebraic Methods Program. 135, 2023,
  `https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2023.100904`

Bibliotheken und Software

- Haskell probability:
  https://hackage.haskell.org/packages/probability
- Die Webseite zum Haskell Code der functional pearl zu probability von Martin Erwig, Steve Kollmannsberger:
  https://web.engr.oregonstate.edu/{tilde}erwig/pfp/