

Einführung in die Funktionale Programmierung:

Haskell

Prof. Dr. Manfred Schmidt-Schauß

WS 2025/26

Stand der Folien: 9. Dezember 2025

Ziele des Kapitels

- Übersicht über die Konstrukte von Haskell
- Übersetzung der Konstrukte in KFPTSP+seq
- Programmierung in Haskell mit Datenstrukturen

Wir erörtern **nicht**:

- Die Übersetzung von `let` und `where`, (umfangreich und wg. rekursiven Bindungen)
Übersetzung in KFPTSP+seq ist möglich durch Fixpunktkombinatoren

Übersicht (www.haskell.org)

- 1 Zahlen
- 2 Algebraische Datentypen
 - Aufzählungstypen
 - Produkttypen
 - Parametrisierte Datentypen
 - Rekursive Datentypen
- 3 Listen
 - Listenfunktionen
 - Ströme
 - Weitere
 - List Comprehensions
- 4 Bäume
 - Datentypen für Bäume
 - Syntaxbäume
- 5 Typdefinitionen

Zahlen in Haskell und KFPTSP+seq

Eingebaute Zahlen in Haskell ; Peano-Kodierung für KFPTSP+seq

Haskell: Zahlen

Eingebaut:

- Ganze Zahlen beschränkter Größe: **Int**
- Ganze Zahlen beliebiger Größe: **Integer**
- Gleitkommazahlen: **Float**
- Gleitkommazahlen mit doppelter Genauigkeit: **Double**
- Rationale Zahlen: **Rational**
(verallgemeinert **Ratio α**, wobei
Rational = Ratio Integer)

Präfix / Infix

Anmerkung zur syntaktischen Verwendung des Minuszeichens:

- Mehr Klammern als man denkt: **5 + -6** geht nicht,
richtig: **5 + (-6)**
Das Zeichen **-** wird speziell (vom Parser) gehandhabt.
- In Haskell können Präfix-Operatoren (Funktionen) auch infix benutzt werden
- **mod 5 6** ; infix durch Hochkommata: **5 'mod' 6**
- Umgekehrt können infix-Operatoren auch präfix benutzt werden
- **5 + 6** ; Präfix durch Einklammern: **(+) 5 6**

Arithmetische Operationen

Rechenoperationen:

- **+** für die Addition
- **-** für die Subtraktion
- ***** für die Multiplikation
- **/** für die Division
- **mod** , **div**

Die Operatoren sind **überladen**

(D.h. gleiches Zeichen, verschiedene Ausführung)

Dafür gibt es **Typklassen**.

Typ von **(+)** :: **Num a => a -> a -> a**

Genaue Behandlung von Typklassen: **später**

Vergleichsoperatoren

- **==** für den Gleichheitstest
(==) :: **(Eq a) => a -> a -> Bool**
- **/=** für den Ungleichheitstest
- **<**, **<=**, **>**, **>=**, für kleiner, kleiner gleich, größer und größer gleich
(der Typ ist **(Ord a) => a -> a -> Bool**).

Assoziativitäten und Prioritäten

```

infixr 9  .
infixr 8  ^, ^^, **
infixl 7  *, /, 'quot', 'rem', 'div', 'mod'
infixl 6  +, -

-- The (:) operator is built-in syntax, and cannot
-- legally be given a fixity declaration; but its
-- fixity is given by:
--   infixr 5  :

infix  4  ==, /=, <, <=, >=, >
infixr 3  &&
infixr 2  ||
infixl 1  >>, >>=
infixr 1  =<<
infixr 0  $, $!, 'seq'

```

Darstellung von Zahlen in KFPTSP+seq

Mögliche Kodierung von Zahlen in KFPTSP+seq: [Peano-Zahlen](#):

- [Peano-Zahlen](#) sind aus **Zero** und (**Succ** [Peano-Zahl](#)) aufgebaut
- nach dem italienischen Mathematiker Guiseppe Peano (1858-1932) benannt

```

data Pint = Zero | Succ Pint
deriving(Eq,Show)

```

Übersetzung:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(0) &:= \text{Zero} \\ \mathcal{P}(n) &:= \text{Succ}(\mathcal{P}(n-1)) \text{ für } n > 0 \end{aligned}$$

Z.B. wird 3 dargestellt als $\text{Succ}(\text{Succ}(\text{Succ}(\text{Zero})))$.

Funktionen auf Peano-Zahlen

```

istZahl :: Pint -> Bool
istZahl x = case x of
    Zero    -> True
    (Succ y) -> istZahl y

```

Keine echte Zahl:

```

unendlich :: Pint
unendlich = Succ unendlich

```

Addition:

```

peanoPlus :: Pint -> Pint -> Pint
peanoPlus x y = if istZahl x && istZahl y then plus x y else bot
  where
    plus x y = case x of
        Zero    -> y
        Succ z  -> Succ (plus z y)
    bot = bot

```

Funktionen auf Peano-Zahlen (2)

Multiplikation:

```

peanoMult :: Pint -> Pint -> Pint
peanoMult x y = if istZahl x && istZahl y then mult x y else bot
  where
    mult x y = case x of
        Zero    -> Zero
        Succ z  -> peanoPlus y (mult z y)

```

Funktionen auf Peano-Zahlen (2)

Vergleiche:

```

peanoEq :: Pint -> Pint -> Bool
peanoEq x y = if istZahl x && istZahl y then eq x y else bot
where
  eq Zero Zero      = True
  eq (Succ x) (Succ y) = eq x y
  eq _ _            = False

peanoLeq :: Pint -> Pint -> Bool
peanoLeq x y = if istZahl x && istZahl y then leq x y else bot
where
  leq Zero y        = True
  leq x Zero        = False
  leq (Succ x) (Succ y) = leq x y

```

Algebraische Datentypen in Haskell

Aufzählungstypen – Produkttypen – Parametrisierte Datentypen –
Rekursive Datentypen

Aufzählungstypen

Aufzählungstyp = Aufzählung verschiedener Werte

```
data Typname = Konstante1 | Konstante2 | ... | KonstanteN
```

Beispiele:

```

data Bool      = True | False

data Wochentag = Montag | Dienstag | Mittwoch | Donnerstag
               | Freitag | Samstag | Sonntag
  deriving(Show)

```

deriving(Show) erzeugt Instanz der Typklasse Show, damit der Datentyp angezeigt werden kann.

Aufzählungstypen (2)

```

istMontag :: Wochentag -> Bool
istMontag x = case x of
  Montag -> True
  Dienstag -> False
  Mittwoch -> False
  Donnerstag -> False
  Freitag -> False
  Samstag -> False
  Sonntag -> False

```

In Haskell erlaubt (in KFTSP+seq nicht):

```

istMontag' :: Wochentag -> Bool
istMontag' x = case x of
  Montag -> True
  y      -> False

```

Übersetzung: Aus istMontag' wird istMontag

Aufzählungstypen (3)

In Haskell:

Pattern-matching links in der Superkombinator-Definition:

```
istMontag'' :: Wochentag -> Bool
istMontag'' Montag = True
istMontag'' _      = False
```

Übersetzung: Erzeuge case-Ausdruck

```
istMontag'' xs = case xs of
    Montag -> True
    ...    -> False
```

Produkttypen

Produkttyp = Zusammenfassung verschiedener Werte in ein Objekt

Bekanntes Beispiel: Tupel

```
data Typname = KonstruktorName Typ1 Typ2 ... TypN
```

Beispiel:

```
data Student = Student
    String -- Name
    String -- Vorname
    Int    -- Matrikelnummer
```

Produkttypen (2)

```
setzeName :: Student -> String -> Student
setzeName x name' =
    case x of
        (Student name vorname mn)
            -> Student name' vorname mn
```

Alternativ mit Pattern auf der linken Seite der Funktionsdefinition:

```
setzeName :: Student -> String -> Student
setzeName (Student name vorname mn) name' =
    Student name' vorname mn
```

Produkttypen und Aufzählungstypen

Man kann beides kombinieren:

```
data DreiDObjekt =
    Wuerfel Int
  | Quader Int Int Int
  | Kugel Int
```

Wird auch als **Summentyp** bezeichnet, allgemein

```
data Summentyp = Konsdef1 | Konsdef2 | ... | Konsdefn
```

wobei `Konsdef1 ... Konsdefn` Konstruktor-Definition mit Argument-Typen sind (z.B. Produkttypen)

Record-Syntax: Einführung

```
data Student = Student
    String -- Vorname
    String -- Name
    Int    -- Matrikelnummer
```

Nachteil:

Nur die **Kommentare** verraten, was die Komponenten darstellen.

Außerdem **mühsam**: Zugriffsfunktionen erstellen:

```
vorname :: Student -> String
vorname (Student vorname name mnr) = vorname
```

Record-Syntax: Einführung (2)

Änderung am Datentyp:

```
data Student = Student
    String -- Vorname
    String -- Name
    Int    -- Matrikelnummer
    Int    -- Hochschulesemester
```

muss für Zugriffsfunktionen nachgezogen werden

```
vorname :: Student -> String
vorname (Student vorname name mnr hsem) = vorname
```

Abhilfe in diesem Aspekt ist die **Record-Syntax**

Record-Syntax in Haskell

Student mit Record-Syntax:

```
data Student = Student {
    vorname    :: String,
    name       :: String,
    matrikelnummer :: Int
}
```

Zur Erinnerung: Ohne Record-Syntax:

```
data Student = Student String String Int
```

⇒ Die Komponenten werden mit **Namen** markiert

Beispiel

Beispiel: Student "Hans" "Mueller" 1234567

kann man schreiben als

```
Student{vorname="Hans", name="Mueller", matrikelnummer=1234567}
```

Reihenfolge der Komponenten egal:

```
Prelude> let x = Student{matrikelnummer=1234567,
    vorname="Hans", name="Mueller"} ↩
```

Record-Syntax

Zugriffsfunktionen sind automatisch verfügbar, z.B.

```
Prelude> matrikelnummer x
1234567
```

- Record-Syntax ist in den Pattern erlaubt
- Nicht alle Felder müssen abgedeckt werden bei Erweiterung der Datenstrukturen, daher kein Problem

```
nachnameMitA Student{nachname = 'A':xs} = True
nachnameMitA _ = False
```

Übersetzung in KFTSP+seq:

Normale Datentypen verwenden
und Zugriffsfunktionen erzeugen

Record-Syntax: Update

```
setzeName :: Student -> String -> Student
setzeName student neuername =
    student {name = neuername}
```

ist äquivalent zu

```
setzeName :: Student -> String -> Student
setzeName student neuername =
    Student {vorname      = vorname student,
             name          = neuername,
             matrikelnummer = matrikelnummer student}
```

Parametrisierte Datentypen

Datentypen in Haskell dürfen **polymorph parametrisiert** sein:

```
data Maybe a = Nothing | Just a
```

Maybe ist polymorph über a (der Parameter ist a)

Beispiel für Maybe-Verwendung:

```
safeHead :: [a] -> Maybe a
safeHead xs = case xs of
    [] -> Nothing
    (y:ys) -> Just y
```

Rekursive Datentypen

Rekursive Datentypen:

Der definierte Typ kommt rechts vom = wieder vor

```
data Typ = ... Konstruktor Typ ...
```

Pint war bereits rekursiv:

```
data Pint = Zero | Succ Pint
```

Listen kann man definieren mit:

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
```

In Haskell mittels spezieller Syntax:

```
data [a] = [] | a:[a]
```

Haskell: Geschachtelte Pattern

```
viertesElement (x1:(x2:(x3:(x4:xs))) = Just x4
viertesElement _                    = Nothing
```

Übersetzung in KFTSP+seq muss geschachtelte case-Ausdrücke einführen:

```
viertesElement ys = case ys of
  [] -> Nothing
  (x1:ys') ->
    case ys' of
      [] -> Nothing
      (x2:ys'') ->
        case ys'' of
          [] -> Nothing
          (x3:ys''') ->
            case ys''' of
              [] -> Nothing
              (x4:xs) -> Just x4
```

Rekursive Datenstrukturen: Listen

Listenfunktionen – Listen als Ströme – List Comprehensions

Listen von Zahlen

Haskell: spezielle Syntax

- `[startwert..endwert]`

erzeugt: Liste der Zahlen von startwert bis endwert

z.B. ergibt `[10..15]` die Liste `[10,11,12,13,14,15]`.

- `[startwert..]`

erzeugt: unendliche Liste ab dem startwert

z.B. erzeugt `[1..]` die Liste aller natürlichen Zahlen.

Listen von Zahlen (2)

- `[startwert,naechsterWert..endwert]`

erzeugt:

`[startwert,startWert+delta,startWert+2delta,...,endwert]`

wobei `delta=naechsterWert - startWert`

Z.B. ergibt: `[10,12..20]` die Liste `[10,12,14,16,18,20]`.

- `[startWert,naechsterWert..]`

erzeugt: die unendlich lange Liste mit der Schrittweite

`naechsterWert - startWert`.

z.B. `[2,4..]` ergibt Liste aller geraden natürlichen Zahlen

Listen von Zahlen (3)

Syntaktischer Zucker: Obige Funktionen sind normal definierbar für den Datentyp `List Integer`:

```
from :: Integer -> [Integer]
from start = start:(from (start+1))

fromTo :: Integer -> Integer -> [Integer]
fromTo start end
  | start > end    = []
  | otherwise     = start:(fromTo (start+1) end)

fromThen :: Integer -> Integer -> [Integer]
fromThen start next = start:(fromThen next (2*next - start))

fromThenTo :: Integer -> Integer -> Integer -> [Integer]
fromThenTo start next end
  | start > end = []
  | otherwise  = start:(fromThenTo next (2*next - start) end)
```

Guards .. bei Funktionsaufrufen

```
f pat1 ... patn
  | guard1 = e1
  | ...
  | guardn = en
```

- Dabei: `guard1` bis `guardn` sind **Boolesche** Ausdrücke, die die Variablen der Pattern `pat1, ..., patn` benutzen dürfen.
- Auswertung von oben nach unten
- erster Guard der zu `True` auswertet bestimmt Wert.
- `otherwise` ist als `True` vordefiniert

Übersetzung von Guards in KFPTSP+seq

```
f pat1 ... patn
  | guard1 = e1
  | ...
  | guardn = en
```

ergibt (if-then-else muss noch übersetzt werden):

```
f pat1 ... patn =
  if guard1 then e1 else
  if guard2 then e2 else
  ...
  if guardn then en else s
```

Wobei `s = bot`, wenn keine weitere Funktionsdefinition für `f` kommt, anderenfalls ist `s` die Übersetzung anderer Definitionsgleichungen.

Beispiel für direkte Kodierung von Guards

```
f (x:xs)
  | x < 10 = True
  | x > 100 = True
f ys      = False
```

Die korrekte Übersetzung in KFPTSP+seq (mit if-then else), unter der Annahme dass es Peano-Zahlen sind, ist:

```
f = case x of {
  Nil -> False;
  (x:xs) -> if x < 10 then True else
            if x > 100 then True else False
}
```

Zeichen und Zeichenketten

- Eingebauter Typ `Char` für Zeichen
- Darstellung: Einfaches Anführungszeichen, z.B. `'A'`
- Steuersymbole beginnen mit `\`, z.B. `\n`, `\t`
- Spezialsymbole `\\` und `\"`

Strings

- Vom Typ `String = [Char]`
- Sind Listen von Zeichen
- Spezialsyntax `"Hallo"` ist gleich zu

`['H','a','l','l','o']` bzw.

`'H':('a':('l':('l':('o':[]))))`.

Standard-Listenfunktionen

Einige vordefinierte Listenfunktionen, fast alle in `Data.List`

Zeichen und Zeichenketten (2)

- Nützliche Funktionen für `Char`: In der Bibliothek `Data.Char`

Z.B.:

```
ord :: Char -> Int
chr :: Int -> Char

isLower :: Char -> Bool
isUpper :: Char -> Bool
isAlpha :: Char -> Bool

toUpper :: Char -> Char
toLower :: Char -> Char
```

Standard-Listenfunktionen (1)

`++`, Listen zusammenhängen, (auch `append` genannt)

```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]    ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x:(xs ++ ys)
```

Beispiele:

```
*> [[1..10] ++ [100..109]]
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,100,101,102,103,104,105,106,107,108,109]
*> [[1,2], [2,3]] ++ [[3,4,5]]
[[1,2], [2,3], [3,4,5]]
*> "Infor" ++ "matik"
"Informatik"
```

Laufzeitverhalten: linear in der Länge der ersten Liste

Standard-Listenfunktionen (2)

Zugriff auf Listenelement per Index: !!

```
(!!) :: [a] -> Int -> a
[]      !! _ = error "Index too large"
(x:xs) !! 0 = x
(x:xs) !! i = xs !! (i-1)
```

Beispiele:

```
*> [1,2,3,4,5] !! 3 ↵
4
*> [0,1,2,3,4,5] !! 3 ↵
3
*> [0,1,2,3,4,5] !! 5 ↵
5
*> [1,2,3,4,5] !! 5 ↵
*** Exception: Prelude.(!!): index too large
```

Standard-Listenfunktionen (3)

Index eines Elements berechnen: elemIndex

```
elemIndex :: (Eq a) => a -> [a] -> Maybe Int
elemIndex a xs = findInd 0 a xs
  where
    findInd i a [] = Nothing
    findInd i a (x:xs)
      | a == x      = Just i
      | otherwise   = findInd (i+1) a xs
```

Beispiele:

```
*> elemIndex 1 [1,2,3] ↵
Just 0
*> elemIndex 1 [0,1,2,3] ↵
Just 1
*> elemIndex 1 [5,4,3,2] ↵
Nothing
*> elemIndex 1 [1,4,1,2] ↵
Just 0
```

Standard-Listenfunktionen (4)

Map: Funktion auf Listenelemente anwenden

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f []      = []
map f (x:xs) = (f x):(map f xs)
```

Beispiele:

```
*> map (*3) [1..20] ↵
[3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48,51,54,57,60]
*> map not [True,False,False,True] ↵
[False,True,True,False]
*> map (^2) [1..10] ↵
[1,4,9,16,25,36,49,64,81,100]
*> map toUpper "Informatik" ↵
"INFORMATIK"
```

Standard-Listenfunktionen (5)

Filter: Elemente heraus filtern (aus Listen)

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter f [] = []
filter f (x:xs)
  | f x      = x:(filter f xs)
  | otherwise = filter f xs
```

Beispiele:

```
*> filter (> 15) [10..20] ↵
[16,17,18,19,20]
*> filter isAlpha "2025 Informatik 2025" ↵
"Informatik"
*> filter (\x -> x > 5) [1..10] ↵
[6,7,8,9,10]
```

Standard-Listenfunktionen (6)

Siehe auch [Data.List](#)

Analog zu filter: **delete**: Ein Listenelement überall entfernen

```
delete x [] = []
delete x (y:ys) = if x == y then ys else delete x ys
```

Mengendifferenz bilden:

```
*> [1,2,3,4,5,6,7] \\ [5,4,3]
[1,2,6,7]
```

Der Kompositionsoperator (.) ist definiert als:

```
(f . g) x = f (g x)
```

Weitere Funktion:

```
*> nub [1,2,3,4,3,2,1,2,4,3,5]
[1,2,3,4,5]
```

Standard-Listenfunktionen (7)

Length: Länge einer Liste

```
length :: [a] -> Int
length [] = 0
length (_:xs) = 1+(length xs)
```

Beispiele:

```
*> length "Informatik"
10
*> length [2..20002]
20001
*> length [1..]
^C Interrupted
```

Standard-Listenfunktionen (8)

Length: Bessere Variante (konstanter Platz)

```
length :: [a] -> Int
length xs = length_it xs 0

length_it [] acc = acc
length_it (_:xs) acc = let acc' = 1+acc
                        in seq acc' (length_it xs acc')
```

Standard-Listenfunktionen (9)

Reverse: zum Umdrehen einer Liste

Schlechte Variante: reverse1; Laufzeit quadratisch!

```
reverse1 :: [a] -> [a]
reverse1 [] = []
reverse1 (x:xs) = (reverse1 xs) ++ [x]
```

Besser mit Stack: Laufzeit linear

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse xs = rev xs []
  where rev [] acc = acc
        rev (x:xs) acc = rev xs (x:acc)
```

```
*> reverse [1..10]
[10,9,8,7,6,5,4,3,2,1]
*> reverse "RELIEFPFEILER"
"RELIEFPFEILER"
*> reverse [1..]
^C Interrupted
```


Standard-Listenfunktionen (10)

Repeat und Replicate

```
repeat :: a -> [a]
repeat x = x:(repeat x)

replicate :: Int -> a -> [a]
replicate 0 x = []
replicate i x = x:(replicate (i-1) x)
```

Beispiele

```
*> repeat 1 [↔]
[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,^C!Interrupted
*> replicate 10 [1,2] [↔]
[[1,2],[1,2],[1,2],[1,2],[1,2],[1,2],[1,2],[1,2],[1,2],[1,2]]
*> replicate 20 'A' [↔]
"AAAAAAAAAAAAAAAAAAAA"
```

Standard-Listenfunktionen (11)

Take und Drop: n Elemente nehmen / verwerfen

```
take :: Int -> [a] -> [a]
take i [] = []
take 0 xs = []
take i (x:xs) = x:(take (i-1) xs)

drop i [] = []
drop 0 xs = xs
drop i (x:xs) = drop (i-1) xs
```

Beispiele:

```
> take 10 [1..]
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
> drop 5 "Informatik"
"matik"
> take 5 (drop 3 [1..])
[4,5,6,7,8]
```

Standard-Listenfunktionen (12)

TakeWhile und DropWhile

```
takeWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
takeWhile p [] = []
takeWhile p (x:xs)
  | p x      = x:(takeWhile p xs)
  | otherwise = []

dropWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
dropWhile p [] = []
dropWhile p (x:xs)
  | p x      = dropWhile p xs
  | otherwise = x:xs
```

```
*> takeWhile (> 5) [5,6,7,3,6,7,8]
[]
*> takeWhile (> 5) [7,6,7,3,6,7,8]
[7,6,7]
*> dropWhile (< 10) [1..20]
[10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20]
```

Standard-Listenfunktionen (13)

Zip und Unzip

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip [] ys = []
zip xs [] = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y):(zip xs ys)

unzip :: [(a, b)] -> ([a], [b])
unzip [] = ([], [])
unzip ((x,y):xs) = let (xs',ys') = unzip xs
                    in (x:xs',y:ys')
```

Beispiele:

```
> zip [1..10] "Informatik"
[(1,'I'),(2,'n'),(3,'f'),(4,'o'),(5,'r'),
 (6,'m'),(7,'a'),(8,'t'),(9,'i'),(10,'k')]
> unzip [(1,'I'),(2,'n'),(3,'f'),(4,'o'),(5,'r'),
 (6,'m'),(7,'a'),(8,'t'),(9,'i'),(10,'k')]
([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10], "Informatik")
```

Standard-Listenfunktionen (14)

Bemerkung zu zip:

Man kann zwar zip3, zip4 etc. definieren um 3, 4, ..., Listen in 3-Tupel, 4-Tupel, etc. einzupacken, aber:

Man kann keine Funktion zipN für n Listen definieren, wobei n ein Argument ist.

Grund: diese Funktion wäre nicht getypt.

Standard-Listenfunktionen (15)

Verallgemeinerung von zip und map:

```
zipWith :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
zipWith f (x:xs) (y:ys) = (f x y) : (zipWith f xs ys)
zipWith _ _ _ = []
```

Damit kann man zip definieren:

```
zip = zipWith (\x y -> (x,y))
```

Anderes Beispiel:

```
vectorAdd :: (Num a) => [a] -> [a] -> [a]
vectorAdd = zipWith (+)
```

Standard-Listenfunktionen (16)

Die Fold-Funktionen:

- foldl $\otimes e [a_1, \dots, a_n]$ ergibt $(\dots((e \otimes a_1) \otimes a_2) \dots) \otimes a_n$
- foldr $\otimes e [a_1, \dots, a_n]$ ergibt $a_1 \otimes (a_2 \otimes (\dots \otimes (a_n \otimes e) \dots))$

Implementierung:

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl f e [] = e
foldl f e (x:xs) = foldl f (e 'f' x) xs

foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f e [] = e
foldr f e (x:xs) = x 'f' (foldr f e xs)
```

foldl und foldr sind (bzgl Ergebnis) **identisch**, wenn die Elemente und der Operator $\otimes$ assoziativ mit neutralem Element e ist.
Einschränkung: Für endliche Listen, und in Bezug auf den berechneten Wert.

Nicht bzgl Effizienz. **Nicht** bei unendlichen Listen.

Standard-Listenfunktionen (17)

Concat:

```
concat :: [[a]] -> [a]
concat = foldr (++) []
```

Beachte: foldl bei append wäre **ineffizienter!**

```
sum = foldl (+) 0
product = foldl (*) 1
```

haben schlechten Platzbedarf, besser strikte Variante von foldl:

```
foldl' :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl' f e [] = e
foldl' f e (x:xs) = let e' = e 'f' x in e' 'seq' foldl' f e' xs
```

Standard-Listenfunktionen (18)

Beachte die Allgemeinheit der Typen von `foldl` / `foldr`

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b

foldr :: (b -> a -> a) -> a -> [b] -> a
```

z.B. sind alle Elemente ungerade?

```
foldl (\xa xb -> xa && (odd xb)) True
```

`xa` und `xb` haben verschiedene Typen!

Analog mit `foldr`:

```
foldr (\xa xb -> (odd xa) && xb) True
```

Standard-Listenfunktionen (19)

Varianten von `foldl`, `foldr`:

```
foldr1 :: (a -> a -> a) -> [a] -> a
foldr1 _ [] = error "foldr1 on an empty list"
foldr1 _ [x] = x
foldr1 f (x:xs) = f x (foldr1 f xs)

foldl1 :: (a -> a -> a) -> [a] -> a
foldl1 f (x:xs) = foldl f x xs
foldl1 _ [] = error "foldl1 on an empty list"
```

Beispiele

```
maximum :: (Ord a) => [a] -> a
maximum xs = foldl1 max xs

minimum :: (Ord a) => [a] -> a
minimum xs = foldl1 min xs
```

Standard-Listenfunktionen (20)

Scanl, Scanr: Zwischenergebnisse von `foldl`, `foldr`

- $\text{scanl } \otimes e [a_1, a_2, \dots, a_n] = [e, e \otimes a_1, (e \otimes a_1) \otimes a_2, \dots]$
- $\text{scanr } \otimes e [a_1, a_2, \dots, a_n] = [\dots, a_{n-1} \otimes (a_n \otimes e), a_n \otimes e, e]$

Es gilt:

- $\text{last } (\text{scanl } f e xs) = \text{foldl } f e xs$
- $\text{head } (\text{scanr } f e xs) = \text{foldr } f e xs$

Standard-Listenfunktionen (21)

```
scanl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> [a]
scanl f e xs = e:(case xs of
    [] -> []
    (y:ys) -> scanl f (e 'f' y) ys)

scanr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> [b]
scanr _ e [] = [e]
scanr f e (x:xs) = f x q : qs
    where qs@(q:_) = scanr f e xs
```

Anmerkung: "As"-Pattern `Var@Pat`

```
> scanr (++) [] [[1,2],[3,4],[5,6],[7,8]]
[[1,2,3,4,5,6,7,8],[3,4,5,6,7,8],[5,6,7,8],[7,8],[]]
> scanl (++) [] [[1,2],[3,4],[5,6],[7,8]]
[[],[1,2],[1,2,3,4],[1,2,3,4,5,6],[1,2,3,4,5,6,7,8]]
> scanl (+) 0 [1..10]
[0,1,3,6,10,15,21,28,36,45,55]
> scanr (+) 0 [1..10]
```

Standard-Listenfunktionen (22)

Beispiele zur Verwendung von scan:

Fakultätsfolge:

```
faks = scanl (*) 1 [1..]
```

Z.B.

```
*> take 5 faks
[1,1,2,6,24,120]
```

Funktion, die alle Restlisten einer Liste berechnet:

```
tails xs = scanr (:) [] xs
```

Z.B.

```
*> tails [1,2,3]
[[1,2,3],[2,3],[3],[]]
```

Standard-Listenfunktionen (22b)

Funktionen, die alle Anfangslisten einer Liste berechnen:

```
map reverse (scanl (flip (:)) [] [1..100])
```

```
scanl (\x y-> x++[y]) [] [1..100]
```

```
map reverse (reverse (scanr (:) [] (reverse [1..100])))
```

- Fragen dazu: sind die genau gleich?

- welche ist wann besser?

Beobachtung: Es kann sehr viele verschiedene Programme für gleiche Funktionalität geben!

Standard-Listenfunktionen (23)

Partitionieren einer Liste

```
partition p xs = (filter p xs, filter (\x -> not (p x)) xs)
```

Effizienter:

```
partition :: (a -> Bool) -> [a] -> ([a], [a])
partition p [] = ([], [])
partition p (x:xs)
  | p x      = (x:r1,r2)
  | otherwise = (r1,x:r2)
  where (r1,r2) = partition p xs
```

Quicksort mit partition

```
quicksort :: (Ord a) => [a] -> [a]
quicksort [] = []
quicksort [x] = [x]
quicksort (x:xs) = let (kleiner,groesser) = partition (<x) xs
                    in quicksort kleiner ++ (x:(quicksort groesser))
```

Listen als Ströme (1)

- Listen in Haskell können **“unendlich lang”** sein
- Daher kann man Listen auch als Ströme auffassen
- Strom entspricht: Daten kommen sequentiell aus einer Datenquelle (z.B. Messgerät)
- Bei der **Stromverarbeitung** muss man beachten:
Nie versuchen die **gesamte Liste auszuwerten** oder nur einen Wert für den ganzen Strom zu berechnen.
- D.h. Funktionen auf Strömen sollten **strom-produzierend** sein.
- Grobe Regel: Funktion $f :: [Int] \rightarrow [Int]$ ist **strom-produzierend**, wenn **take n (f list)** für jede unendliche Liste und jedes n terminiert
- Ungeeignet daher: **reverse**, **length**, **foldl**,
- Geeignet: **map**, **filter**, **zipWith**, **take**, **drop**

Beispiel Fibonacci Zahlen als (unendlicher) Strom

Standard Definition der Fibonacci Folge in Haskell:

mit rekursiver Verwendung der bereits berechneten Folge in Haskell:

```
fib n = fibs!!n
fibs = 0 : 1 : ( zipWith (+) fibs (tail fibs) )
```

Die Verarbeitung ist effizient,
die Fibonacci-Zahlen (pro Argument)
werden nur einmal berechnet
und dann wiederverwendet.

Listen als Ströme (2)

Einige Stromfunktionen für Strings:

- `words :: String -> [String]`
Zerlegen einer Zeichenkette in eine Liste von Wörtern
- `lines :: String -> [String]`
Zerlegen einer Zeichenkette in eine Liste der Zeilen
- `unlines :: [String] -> String`
Einzelne Zeilen in einer Liste zu einem String zusammenfügen
(mit Zeilenumbrüchen)

Beispiele:

```
*> words "Haskell ist eine funktionale Programmiersprache"
["Haskell","ist","eine","funktionale","Programmiersprache"]
*> lines "1234\n5678\n90"
["1234","5678","90"]
*> unlines ["1234","5678","90"] "1234\n5678\n90\n"
```

Listen als Ströme (2)

Mischen zweier sortierter Ströme zu einem sortierten Strom

```
merge :: (Ord t) => [t] -> [t] -> [t]
merge [] ys = ys
merge xs [] = xs
merge a@(x:xs) b@(y:ys)
  | x <= y = x:merge xs b
  | otherwise = y:merge a ys
```

Beispiel:

```
*> merge [1,3,5,6,7,9] [2,3,4,5,6]
[1,2,3,3,4,5,5,6,6,7,9]
```

Listen als Ströme (3)

Doppelte Elemente in Liste entfernen

```
nub xs = nub' xs []
where
  nub' [] _ = []
  nub' (x:xs) seen
    | x 'elem' seen = nub' xs seen
    | otherwise = x : nub' xs (x:seen)
```

Anmerkungen:

- `seen` merkt sich die bereits gesehenen Elemente
- Laufzeit von `nub` ist quadratisch
(kann verbessert werden zu $O(n \log(n))$ z.B. bei Zahlen).

```
elem e [] = False
elem e (x:xs)
  | e == x = True
  | otherwise = elem e xs
```

Listen als Ströme (4)

Doppelte Elemente aus **sortierter** Liste entfernen:

```
nubSorted (x:y:xs)
  | x == y    = nubSorted (y:xs)
  | otherwise = x:(nubSorted (y:xs))
nubSorted y = y
```

ist linear in der Länge der Liste.

Listen als Ströme (5)

Mischen der Vielfachen von 3,5 und 7:

```
*> nubSorted $ merge (map (3*) [1..])
*>      (merge (map (5*) [1..]) (map (7*) [1..]))
[3,5,6,7,9,10,12,14,15,18,20,..]
```

Listen als Wörterbuch

Lookup

```
lookup      :: (Eq a) => a -> [(a,b)] -> Maybe b
lookup key []      = Nothing
lookup key ((x,y):xys)
  | key == x        = Just y
  | otherwise       = lookup key xys
```

Beispiele:

```
*> lookup 5 [(1,'A'), (2,'B'), (4,'C'), (5,'F')]
Just 'F'
*> lookup 3 [(1,'A'), (2,'B'), (4,'C'), (5,'F')]
Nothing
```

Listen als Mengen (1)

Any und All: Wie Quantoren

```
any _ []      = False
any p (x:xs)  = True
  | (p x)      = True
  | otherwise  = any p xs

all _ []      = True
all p (x:xs)  = True
  | (p x)      = all p xs
  | otherwise  = False
```

Beispiele:

```
*> all even [1,2,3,4]
False
*> all even [2,4]
True
*> any even [1,2,3,4]
True
```

Nur bedingt als Stromfunktionen geeignet.

Listen als Mengen (2)

Delete: Löschen eines Elements

```
delete :: (Eq a) => a -> [a] -> [a]
delete e (x:xs)
  | e == x    = xs
  | otherwise = x:(delete e xs)
```

Mengendifferenz: \

```
(\\) :: (Eq a) => [a] -> [a] -> [a]
(\\) = foldl (flip delete) []
```

dabei dreht flip die Argumente einer Funktion um:

```
flip :: (a -> b -> c) -> b -> a -> c
flip f a b = f b a
```

Listen als Mengen (2b)

Beispiele:

```
*> delete 3 [1,2,3,4,5,3,4,3]
[1,2,4,5,3,4,3]
*> [1,2,3,4,4] \\ [9,6,4,4,3,1]
[2]
*> [1,2,3,4] \\ [9,6,4,4,3,1]
[2]
```

Listen als Mengen (3)

Vereinigung und Schnitt

```
union :: (Eq a) => [a] -> [a] -> [a]
union xs ys = xs ++ (ys \\ xs)
```

```
intersect :: (Eq a) => [a] -> [a] -> [a]
intersect xs ys = filter (\y -> any (== y) ys) xs
```

```
*> union [1,2,3,4,4] [9,6,4,3,1]
[1,2,3,4,4,9,6]
*> union [1,2,3,4,4] [9,6,4,4,3,1]
[1,2,3,4,4,9,6]
*> union [1,2,3,4,4] [9,9,6,4,4,3,1]
[1,2,3,4,4,9,6]
*> intersect [1,2,3,4,4] [4,4]
[4,4]
*> intersect [1,2,3,4] [4,4]
[4]
*> intersect [1,2,3,4,4] [4]
[4,4]
```

Listen als Mengen (4)

Vereinigung und Schnitt

- Mengenoperationen sind schneller wenn:
 - man eine lineare Ordnung auf den Elementen hat
 - und sortierte Listen verarbeitet.
- Mengenoperationen auf Mengen als Bäume ... (wie DB)
- Nachschauen in Data.List

ConcatMap

Konkatinert die Ergebnislisten: ConcatMap

```
concatMap :: (a -> [b]) -> [a] -> [b]
concatMap f = concat . map f
```

```
*> concatMap (\x-> take x [1..]) [3..7]
[1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,6,7]
```

List Comprehensions: Beispiele

Kartesisches Produkt

```
[(x,y) | x <- [1..], y <- [1..]]
```

```
*> take 10 [(x,y) | x <- [1..], y <- [1..]]
[(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9),(1,10)]
```

Liste aller ungeraden Zahlen

```
[x | x <- [1..], odd x]
```

Liste aller Quadratzahlen

```
[x*x | x <- [1..]]
```

List Comprehensions

- Spezielle Syntax zur Erzeugung und Verarbeitung von Listen
- ZF-Ausdrücke (nach der Zermelo-Fränkel Mengenlehre)

Syntax: `[Expr | q1,q2,...,qn]`

- Expr: ein Ausdruck
- $FV(Expr)$ sind durch $q1,q2,...,qn$ gebunden
- qi ist:
 - ein Generator der Form `pat <- Expr`, oder
 - ein Guard, d.h. ein Ausdruck booleschen Typs,
 - oder eine Deklaration lokaler Bindungen der Form `let x1=e1,...,xn=en` (ohne in-Ausdruck!) ist.

List Comprehensions: Beispiele (2)

Liste aller Paare (Zahl, Quadrat der Zahl)

```
[(y,x*x) | x <- [1..], let y = x]
```

```
[a | (a,_,_,_) <- [(x,x,y,y) | x <- [1..3], y <- [1..3]]]
[1,1,1,2,2,2,3,3,3]
```

Map, Filter und Concat

```
map f xs = [f x | x <- xs]
```

```
filter p xs = [x | x <- xs, p x]
```

```
concat xss = [y | xs <- xss, y <- xs]
```


List Comprehensions: Beispiele (3)

Quicksort:

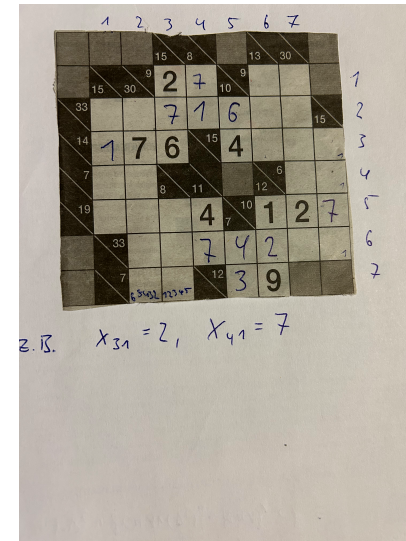
```
qsort (x:xs) =  qsort [y | y <- xs, y <= x]
               ++ [x]
               ++ qsort [y | y <- xs, y > x]
qsort x = x
```

Beispiel: Kakuro-Rätsel:

Lösung mittels List Comprehensions

Idee Durchmusterung aller Möglichkeiten.
Generatoren und Tests.

List-Comprehensions Beispiel-Anwendung: Kakuro



(cit. Aus Frankfurter Rundschau, Nov, 2023)

List-Comprehensions Beispiel-Anwendung: Kakuro

ad-hoc programmiert: probiert alle Möglichkeiten aus.

Element x - i - j : Zahl in Spalte i , Zeile j

Tests: Ziffern verschieden in einem Zahlblock

Summen stimmen mit Vorgabe überein.

```
import Data.List
sol = [(x16,x17),(x21,x22,x26,x27),(x36,x37,x38),(x41,x42,x47,x48),(x51,x52,x53),(x62,x63,x67,x68),
      (x72,x73)] |
  x16 <- [1..8], x17 <- [9-x16], x21 <- [2,3,4,5,8,9],
  x22 <- [2,3,4,5,8,9] \ [x21],
  x26 <- [2,3,4,5,8,9] \ [x21,x22,x16], x27 <- [2,3,4,5,8,9] \ [x21,x22,x26,x17], x21+x22+x26+x27 == 19,
  x36 <- [1,2,3,5,6,7,8,9] \ [x16,x26], x37 <- [1,3,5,6,7,8,9] \ [x17,x27,x36],
  x38 <- [1,2,3,5,6,8,9] \ [x36,x37], x36+x37+x38 == 11,
  x47 <- [1,3,4,5] \ [x17,x27,x37], x48 <- [6-x47] \ [x38],
  x67 <- [30-x17-x27-x37-x47-2] \ [2,4,7,x17,x27,x37,x47], x67 <= 9,
  x68 <- [1..9] \ [2,4,7,x38,x48], x68 == 8 - x38-x48, x62 <- [1,3,5,6,8,9] \ [x67,x68],
  x63 <- [20-x62-x67-x68],
  x41 <- [2..6] \ [x21], x42 <- [7-x41], x42 /= x22, x51 <- [14-x21-x41] \ [4,1,x21,x41],
  x52 <- [1..9] \ [x22,7,x42,x51,4],
  x53 <- [15-x51-x52] \ [x51,x52,4], x53 > 0,
  x62 <- [1..9] \ [x22,7,x42,x52,2,4,x67,x68],
  x63 <- [20-x62-x67-x68] \ [x53,x62,7,4,2,x67,68], x63 > 0,
  30 == x17+x27+x37+x47+2+x67,
  x72 <- [23 - x22-x42-x52-x62] \ [x22,x42,x52,x63], x72 > 0, x72 < 7,
  x73 <- [7-x72] \ [x53,x63],
  x53+x63+x73 == 8,
  x17+x27+x37+x47+2+x67 == 30
]
```

List-Comprehensions und magische Quadrate

Magisches Quadrat von Albrecht Dürer 1471 – 1528

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

- Zahlen 1 bis 16
- Alle Zeilensummen und Spaltensummen sind 34.
- weitere Strukturen:
Diagonalen, 4-Blöcke, usw. mit Summe 34.

List-Comprehensions und magische 4-Quadrate

```
import Data.List
magisch4 =
  let k = (16*16+16) `div` 8 -- (= 34 = Summe 1..16 geteilt durch 4)
  in
    [ (x1,x2,x3,x4),(x5,x6,x7,x8),(x9,x10,x11,x12),(x13,x14,x15,x16) |
      x1 <- [1..8], x2 <- [1..16] \ [x1], x3 <- [1..16] \ [x1,x2], x4 <- [k-(x1+x2+x3)] \ [x1,x2,x3],
      x4 > 0, x4 < 17, x1 < x4,
      x5 <- [1..16] \ [x1,x2,x3,x4], x6 <- [k-(x1+x2+x5)], x6 > 0, x6 < 17,
      x7 <- [1..16] \ [x1,x2,x3,x4,x5,x6],
      x8 <- [1..16] \ [x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7],
      --Test aller 4x4:
      x1+x2+x5+x6 == k, x2+x3+x6+x7 == k, x3+x4+x7+x8 == k,
      x9 <- [1..16] \ [x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8],
      x13 <- [k-(x1+x5+x9)] \ [x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9], x13 > 0, x13 < 17,
      x10 <- [k-(x5+x6+x9)] \ [x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x13], x10 > 0, x10 < 17,
      x11 <- [k-(x6+x7+x10)] \ [x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x13], x11 > 0, x11 < 17,
      x12 <- [k-(x7+x8+x11)] \ [x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x13], x12 > 0, x12 < 17,
      x14 <- [k-(x9+x10+x13)] \ [x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13], x14 > 0, x14 < 17,
      x15 <- [k-(x10+x11+x14)] \ [x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13,x14], x15 > 0, x15 < 17,
      x16 <- [k-(x11+x12+x15)] \ [x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13,x14,x15], x16 > 0, x16 < 17,
      -- Diagonalen auch
      x1+x6+x11+x16 == k, x4+x7+x10+x13 == k,
      -- Extra: alle (pandiagonalen (links und rechts, lt wiki))
      x2+x7+x12+x13 == k, x3+x8+x9+x14 == k, x4+x5+x10+x15 == k,
      x1+x8+x11+x14 == k, x2+x5+x12+x15 == k, x3+x6+x9+x16 == k, x4+x7+x10+x13 == k
    ]
```

Anzahl magische Quadrate (Bedingungen wie oben) $168 = 4 * 42$

Programmierung ad hoc, Laufzeit ca. 1 sec.

ca. 2h programmiert und getestet

M. Schmidt-Schauß

(05) Haskell

85 / 119

List-Comprehensions und magische 8-Quadrate

Verallgemeinerung der magischen 4-Quadrate zu

Magischen 8-Quadraten :

Nicht machbar mit der Methode der vollständigen Suche.

Effizienter: Methode aus der Dürer- Zeit verallgemeinern:

1. Erstelle eine quadratische Matrix mit Zeilen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; usw. mit fortlaufenden Zahlen. bis 64.
2. Wende mehrfach Vertauschungsoperationen an:
 Zeilentausch: $1 \leftrightarrow 2; 3 \leftrightarrow 4, 5 \leftrightarrow 6, 7 \leftrightarrow 8$
 Spaltentausch: $1 \leftrightarrow 2; 3 \leftrightarrow 4, 5 \leftrightarrow 6, 7 \leftrightarrow 8$
 Weitere Permutationen?
3. Test Eigenschaften. ... Summe von Teilquadraten o.ä.?
4. Verallgemeinerungen ? 32, 64-Quadrate??

M. Schmidt-Schauß

(05) Haskell

86 / 119

Übersetzung von List-Comprehensions in ZF-freies Haskell

```
[ e | True ]      = [e]
[ e | q ]         = [ e | q, True ]
[ e | b, Q ]      = if b then [ e | Q ] else []
[ e | p <- l, Q ] = let ok p = [ e | Q ]
                  ok _ = []
                  in concatMap ok l
[ e | let decls, Q ] = let decls in [ e | Q ]
```

(wobei Schwarzes 1-1 gemeint ist, und Bunt sind Variablen)

- ok eine neue Variable,
- b ein Guard,
- q ein Generator, eine lokale Bindung oder ein Guard (nicht True)
- Q eine Folge von Generatoren, Deklarationen und Guards.

M. Schmidt-Schauß

(05) Haskell

87 / 119

Übersetzung in ZF-freies Haskell: Beispiel

```
[x*y | x <- xs, y <- ys, x > 2, y < 3]
= let ok x = [x*y | y <- ys, x > 2, y < 3]
  ok _ = []
  in concatMap ok xs
= let ok x = let ok' y = [x*y | x > 2, y < 3]
  ok' _ = []
  in concatMap ok' ys
  ok _ = []
  in concatMap ok xs
```

M. Schmidt-Schauß

(05) Haskell

88 / 119

Übersetzung in ZF-freies Haskell: Beispiel

```
= let ok x = let ok' y = if x > 2 then [x*y | y < 3] else []
              ok' _ = []
              in concatMap ok' ys
  ok _ = []
in concatMap ok xs

= let ok x = let ok' y = if x > 2 then [x*y | y < 3, True] else []
              ok' _ = []
              in concatMap ok' ys
  ok _ = []
in concatMap ok xs

= let ok x = let ok' y = if x > 2 then
                        (if y < 3 then [x*y | True] else [])
                        else []
              ok' _ = []
              in concatMap ok' ys
  ok _ = []
in concatMap ok xs
```

Übersetzung in ZF-freies Haskell: Beispiel

```
[x*y | x <- xs, y <- ys, x > 2, y < 3]

= let ok x = let ok' y = if x > 2 then
                        (if y < 3 then [x*y] else [])
                        else []
      ok' _ = []
      in concatMap ok' ys
  ok _ = []
  in concatMap ok xs
```

Diese Übersetzung funktioniert, aber ist nicht optimal,
da Listen generiert und wieder abgebaut werden;
und bei `x <- xs` unnötige Pattern-Fallunterscheidung

Rekursive Datenstrukturen: Bäume in Haskell

Binäre Bäume – N-äre Bäume – Funktionen auf Bäumen – Syntaxbäume

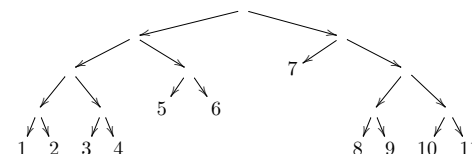
Rekursive Datenstrukturen: Bäume

Binäre Bäume mit (polymorphen) Blattmarkierungen:

```
data BBAum a = Blatt a | Knoten (BBAum a) (BBAum a)
  deriving(Eq,Show)
```

BBaum ist Typkonstruktor, Blatt und Knoten sind Datenkonstruktoren

Typ: BBaum Int



```

beispielBaum =
  Knoten
    (Knoten
      (Knoten
        (Knoten (Blatt 1) (Blatt 2))
        (Knoten (Blatt 3) (Blatt 4))
      )
      (Knoten (Blatt 5) (Blatt 6))
    )
    (Knoten
      (Blatt 7)
      (Knoten
        (Knoten (Blatt 8) (Blatt 9))
        (Knoten (Blatt 10) (Blatt 11))
      )
    )
  )
(05) Haskell

```

Funktionen auf Bäumen (1)

Summe aller Blattmarkierungen

```
bSum (Blatt a) = a
bSum (Knoten links rechts) = (bSum links) + (bSum rechts)
```

Ein Beispielaufwurf:

```
*> bSum beispielBaum 
66
```

Liste der Blätter

```
bRand (Blatt a) = [a]
bRand (Knoten links rechts) = (bRand links) ++ (bRand rechts)
```

Test:

```
*> bRand beispielBaum 
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11]
```

Funktionen auf Bäumen (2)

Map auf Bäumen

```
bMap f (Blatt a) = Blatt (f a)
bMap f (Knoten links rechts) = Knoten (bMap f links) (bMap f rechts)
```

Beispiel:

```
*> bMap (^2) beispielBaum 
Knoten (Knoten (Knoten (Knoten (Blatt 1) (Blatt 4))
(Knoten (Blatt 9) (Blatt 16))) (Knoten (Blatt 25) (Blatt 36)))
(Knoten (Blatt 49) (Knoten (Knoten (Blatt 64) (Blatt 81))
(Knoten (Blatt 100) (Blatt 121))))
```

Die Anzahl der Blätter eines Baumes:

```
anzahlBlaetter = bSum . bMap (\x -> 1)
```

Funktionen auf Bäumen (3)

Element-Test

```
bElem e (Blatt a)
| e == a      = True
| otherwise   = False
bElem e (Knoten links rechts) = (bElem e links) || (bElem e rechts)
```

Einige Beispielaufwürfe:

```
*> 11 'bElem' beispielBaum 
True
*> 1 'bElem' beispielBaum 
True
*> 20 'bElem' beispielBaum 
False
*> 0 'bElem' beispielBaum  m
False
```

Funktionen auf Bäumen (4)

Fold auf Bäumen

```
bFold op (Blatt a) = a
bFold op (Knoten a b) = op (bFold op a) (bFold op b)
```

Damit kann man z.B. die Summe und das Produkt berechnen:

```
*> bFold (+) beispielBaum 
66
*> bFold (*) beispielBaum 
39916800
```

Funktionen auf Bäumen (4b)

Allgemeineres Fold auf Bäumen:

```
foldbt :: (a -> b -> b) -> b -> BBaum a -> b
foldbt op a (Blatt x)    = op x a
foldbt op a (Knoten x y) = (foldbt op a y) x
```

Der Typ des Ergebnisses kann anders sein als der Typ der Blattmarkierung

Zum Beispiel: Rand eines Baumes:

```
*> foldbt (:) [] beispielBaum
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11]
```

Haskell Bäume Data.Tree

Data.Tree

Hackage-Bibliothek zu gelabelten n-ären Bäumen

```
data Tree a =
  Node {rootLabel :: a
        subForest  :: Forest a }
type Forest a = [Tree a]
```

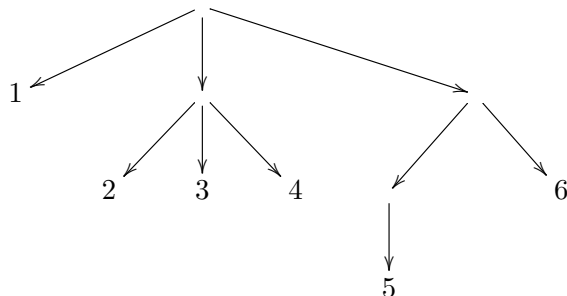
Tests

```
Data.Tree> let t1 = Node {rootLabel= 1, subForest = []}
Data.Tree> let t2= Node{rootLabel= 2,subForest = [t1]}
Data.Tree> t2
Node {rootLabel = 2, subForest = [Node {rootLabel = 1,
subForest = []}]}
```

N-äre Bäume

```
data NBaum a = NBlatt a | NKnoten [NBaum a]
deriving(Eq,Show)
```

```
beispiel = NKnoten [NBlatt 1,
  NKnoten [NBlatt 2, NBlatt 3, NBlatt 4],
  NKnoten [NKnoten [NBlatt 5], NBlatt 6]]
```

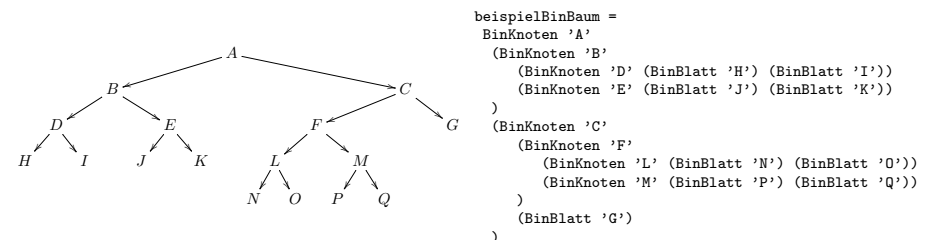


Bäume mit Knotenmarkierungen

Beachte: BBaum und NBaum haben nur Markierungen der Blätter!

Bäume mit Markierung aller Knoten

```
data BinBaum a = BinBlatt a | BinKnoten a (BinBaum a)(BinBaum a)
deriving(Eq,Show)
```

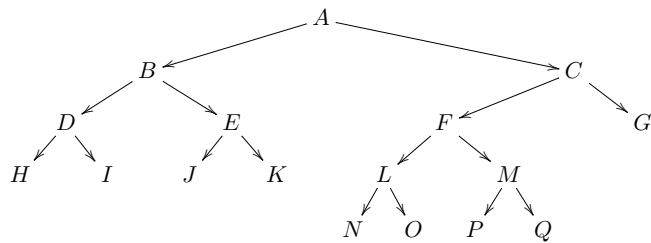


Funktionen auf BinBaum (1)

Knoten in Preorder-Reihenfolge (Wurzel, links, rechts):

```
preorder :: BinBaum t -> [t]
preorder (BinBlatt a)      = [a]
preorder (BinKnoten a l r) = a:(preorder l) ++ (preorder r)
```

```
preorder beispielBinBaum ----> "ABDHIEJKCFLNOMPQG"
```



M. Schmidt-Schauß

(05) Haskell

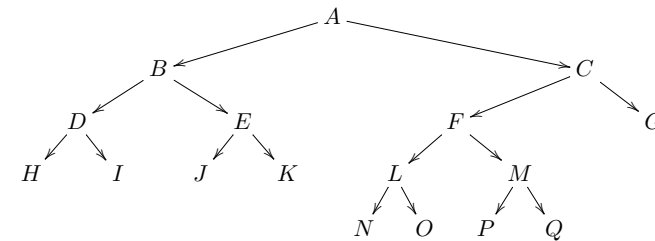
101 / 119

Funktionen auf BinBaum (2)

Knoten in Inorder-Reihenfolge (links, Wurzel, rechts):

```
inorder :: BinBaum t -> [t]
inorder (BinBlatt a) = [a]
inorder (BinKnoten a l r) = (inorder l) ++ a:(inorder r)
```

```
> inorder beispielBinBaum ↵
"HDIBJEKANLOFPMQCG"
```



M. Schmidt-Schauß

(05) Haskell

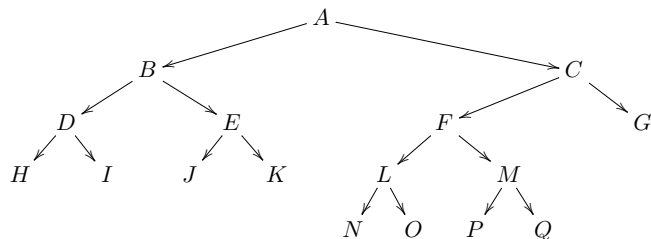
102 / 119

Funktionen auf BinBaum (3)

Knoten in Post-Order Reihenfolge (links, rechts, Wurzel)

```
postorder (BinBlatt a) = [a]
postorder (BinKnoten a l r) =
  (postorder l) ++ (postorder r) ++ [a]
```

```
> postorder beispielBinBaum ↵
"HIDJKEBNOLPQMFGCA"
```



M. Schmidt-Schauß

(05) Haskell

103 / 119

Funktionen auf BinBaum (2)

Level-Order (Stufenweise, wie Breitensuche)

Schlecht:

```
levelorderSchlecht b =
  concat [nodesAtDepthI i b | i <- [0..depth b]]
where
  nodesAtDepthI 0 (BinBlatt a) = [a]
  nodesAtDepthI i (BinBlatt a) = []
  nodesAtDepthI 0 (BinKnoten a l r) = [a]
  nodesAtDepthI i (BinKnoten a l r) = (nodesAtDepthI (i-1) l)
    ++ (nodesAtDepthI (i-1) r)

depth (BinBlatt _) = 0
depth (BinKnoten _ l r) = 1+(max (depth l) (depth r))
```

```
> levelorderSchlecht beispielBinBaum ↵
"ABCDEFGHGIJKLMNOPQ"
```

M. Schmidt-Schauß

(05) Haskell

104 / 119

Funktionen auf BinBaum (3)

Level-Order (Stufenweise, wie Breitensuche)

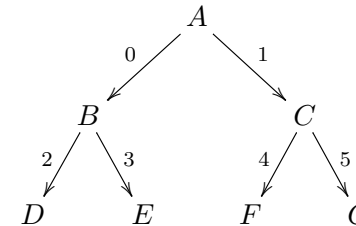
Besser:

```
levelorder b = loForest [b]
  where
    loForest xs = map root xs ++ concatMap (loForest . subtrees) xs
    root (BinBlatt a) = a
    root (BinKnoten a _ _) = a
    subtrees (BinBlatt _) = []
    subtrees (BinKnoten _ l r) = [l,r]
```

```
*> levelorder beispielBinBaum
"ABCDEFGHJKLMNOPQ"
```

Bäume mit Knoten und Kantenmarkierungen

```
data BinBaumMitKM a b =
  BiBlatt a
  | BiKnoten a (b, BinBaumMitKM a b) (b, BinBaumMitKM a b)
  deriving (Eq, Show)
```



```
beispielBiBaum =
  BiKnoten 'A'
    (0, BiKnoten 'B'
      (2, BiBlatt 'D')
      (3, BiBlatt 'E'))
    (1, BiKnoten 'C'
      (4, BiBlatt 'F')
      (5, BiBlatt 'G'))
```

Funktion auf BinBaumMitKM

Map mit 2 Funktionen: auf Blatt- und Knoten-Markierung

```
biMap f g (BiBlatt a) = BiBlatt (f a)
biMap f g (BiKnoten a (kl,links) (kr,rechts)) =
  BiKnoten (f a) (g kl, biMap f g links) (g kr, biMap f g rechts)
```

Beispiel

```
*> biMap toLower even beispielBiBaum
BiKnoten 'a'
  (True, BiKnoten 'b' (True, BiBlatt 'd') (False, BiBlatt 'e'))
  (False, BiKnoten 'c' (True, BiBlatt 'f') (False, BiBlatt 'g'))
```

Anmerkung zum \$-Operator

Definition:

```
f $ x = f x
```

wobei Priorität ganz niedrig, z.B.

```
map (*3) $ filter (>5) $ concat [[1,1],[2,5],[10,11]]
```

wird als

```
map (*3) (filter (>5) (concat [[1,1],[2,5],[10,11]]))
```

geklammert

Syntaxbäume als Anwendungsbeispiel für Baumstrukturen

Auch **Syntaxbäume** sind Bäume

Beispiel: Einfache arithmetische Ausdrücke:

$$\begin{aligned} E &::= (E + E) \mid (E * E) \mid Z \\ Z &::= 0Z' \mid \dots \mid 9Z' \\ Z' &::= \varepsilon \mid Z \end{aligned}$$

Als Haskell-Datentyp (infix-Konstruktoren müssen mit `:` beginnen)

```
data ArEx = ArEx :+: ArEx      data ArEx = Plus ArEx ArEx
          | ArEx :* ArEx      | Mult ArEx ArEx
          | Zahl Int          | Zahl Int
```

alternativ

Z.B. $(3 + 4) * (5 + (6 + 7))$ als Objekt vom Typ `ArEx`:

```
((Zahl 3) :+: (Zahl 4)) :* ((Zahl 5) :+: ((Zahl 6) :+: (Zahl 7)))
```

Syntaxbäume (2)

Interpreter für Typ `ArEx` als Funktion in Haskell:

```
interpretArEx :: ArEx -> Int
interpretArEx (Zahl i) = i
interpretArEx (e1 :+: e2) = (interpretArEx e1) + (interpretArEx e2)
interpretArEx (e1 :* e2) = (interpretArEx e1) * (interpretArEx e2)
```

Syntaxbäume: Lambda-Kalkül

Syntax des Lambda-Kalküls als Datentyp:

```
data LExp v =
  Var v          -- x
  | Lambda v (LExp v) -- \v.e
  | App (LExp v) (LExp v) -- (e1 e2)
```

Z.B. $s = (\lambda x.x) (\lambda y.y)$:

```
s :: LExp String
s = App (Lambda "x" (Var "x")) (Lambda "y" (Var "y"))
```

Implementierung der NO-Reduktion

Versuche eine β -Reduktion durchzuführen, dabei frische Variablen mitführen zum Umbenennen

```
tryNOBeta :: (Eq b) => LExp b -> [b] -> Maybe (LExp b, [b])
```

- Einfachster Fall: Beta-Reduktion ist auf Top-Level möglich:

```
tryNOBeta (App (Lambda v e) e2) freshvars =
  let (e',vars) = substitute freshvars e e2 v
  in Just (e',vars)
```

- Bei anderen Anwendungen: gehe links ins Argument (rekursiv):

```
tryNOBeta (App e1 e2) freshvars =
  case tryNOBeta e1 freshvars of
    Nothing -> Nothing
    Just (e1',vars) -> (Just ((App e1' e2), vars))
```

- Andere Fälle: Keine Reduktion möglich:

```
tryNOBeta _ vars = Nothing
```


Implementierung der NO-Reduktion (2)

Implementierung der $\xrightarrow{no,*}$ -Reduktion:

```
reduceNO e = let (e',v') = rename e fresh
              in tryNO e' v'
  where
    fresh = ["x_" ++ show i | i <- [1..]]
tryNO e vars = case tryNOBeta e vars of
  Nothing -> e
  Just (e',vars') -> tryNO e' vars'
```

Hilfsfunktionen rename, fresh siehe nächste Folien

Implementierung der NO-Reduktion (3)

Hilfsfunktion: Substitution mit Umbenennung:

```
substitute freshvars (Var v) expr2 var
  | v == var = rename (expr2) freshvars
  | otherwise = (Var v,freshvars)

substitute freshvars (App e1 e2) expr2 var =
  let (e1',vars') = substitute freshvars e1 expr2 var
      (e2',vars'') = substitute vars' e2 expr2 var
  in (App e1' e2', vars'')

substitute freshvars (Lambda v e) expr2 var =
  let (e',vars') = substitute freshvars e expr2 var
  in (Lambda v e',vars')
```

Implementierung der NO-Reduktion (4)

Hilfsfunktion: Umbenennung eines Ausdrucks

```
rename expr freshvars = rename_it expr [] freshvars
  where
    rename_it (Var v) renamings freshvars =
      case lookup v renamings of
        Nothing -> (Var v,freshvars)
        Just v' -> (Var v',freshvars)

    rename_it (App e1 e2) renamings freshvars =
      let (e1',vars') = rename_it e1 renamings freshvars
          (e2',vars'') = rename_it e2 renamings vars'
      in (App e1' e2', vars'')

    rename_it (Lambda v e) renamings (f: freshvars) =
      let (e',vars') = rename_it e ((v,f):renamings) freshvars
      in (Lambda f e',vars')
```

Typdefinitionen in Haskell

Drei syntaktische Möglichkeiten in Haskell

- data
- type
- newtype

Verwendung von data haben wir bereits ausgiebig gesehen

Typdefinitionen in Haskell (2)

type; Variante von Typdefinitionen.

Mit `type` definiert man **Typsynonyme**, d.h.:

Neuer Name für bekannten Typ

Beispiele:

```
type IntCharPaar = (Int,Char)
type Studenten = [Student]
type MyList a = [a]
```

Sinn davon: Verständlicher, z.B.

```
alleStudentenMitA :: Studenten -> Studenten
alleStudentenMitA = map nachnameMitA
```

Typdefinitionen in Haskell (3)

Typdefinition mit `newtype`:

- `newtype` ist sehr ähnlich zu `type`
- Mit `newtype`-definierte Typen dürfen **eigene Klasseninstanz** für Typklassen haben
- Mit `type`-definierte Typen aber nicht.
- Mit `newtype`-definierte Typen haben **einen** neuen Konstruktor
- `case` und `pattern match` für Objekte vom `newtype`-definierten Typ sind immer erfolgreich.

Typdefinitionen in Haskell (4)

Beispiel für `newtype`:

```
newtype Studenten' = St [Student]
```

Diese Definition kann man sich vorstellen als

```
data Studenten' = St [Student]
```

Ist aber nicht semantisch äquivalent dazu, da Terminierungsverhalten anders

Vorteil `newtype` vs. `data`: Der Compiler weiß, dass es nur ein Typsynonym ist und kann optimieren:
`case`-Ausdrücke dazu werden eliminiert und durch direkte Zugriffe ersetzt.