GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Einführung in die Funktionale Programmierung:

Funktionale Kernsprachen:

Die KFP-Kernsprachen

Prof. Dr. Manfred Schmidt-Schauß

WS 2025/26

Stand der Folien: 11. November 2025

Übersicht

Lambda-Kalkül und Haskell

Berechnung im puren **Lambda-Kalkül** ist universell.

Lambda-Kalkül und Haskell

Berechnung im puren **Lambda-Kalkül** ist universell.

ABER:

- Es ist sehr mühsam etwas zu programmieren
- Es ist ebenfalls mühsam aus der Ausgabe eine verständliche Antwort zu extrahieren.
- Sehr wenig intuitiv
- Kein automatischer Standard für z.B. Zahlen und Listen usw.
- Iteration und Rekursion (nur) über Fixpunkt-Kombinatoren

Lambda-Kalkül und Haskell

Der Lambda-Kalkül allein ist als Kernsprache für Haskell
bzw. funktionale Programmiersprachen eher ungeeignet:

Lambda-Kalkül und Haskell

Der Lambda-Kalkül allein ist als Kernsprache für Haskell bzw. funktionale Programmiersprachen eher ungeeignet:

- Keine echten Daten:
  Zahlen, Boolesche Werte, Listen und komplexe Datenstrukturen fehlen im Lambda-Kalkül.

Lambda-Kalkül und Haskell

Der Lambda-Kalkül allein ist als Kernsprache für Haskell
bzw. funktionale Programmiersprachen eher ungeeignet:

- Keine echten Daten:
  Zahlen, Boolesche Werte, Listen und komplexe Datenstrukturen fehlen im Lambda-Kalkül.

  Ausweg mittels **Church-Kodierung**?:

$$\begin{array}{lll} \text{z.B. } \textit{true} & = & \lambda x, y.x \\ \textit{false} & = & \lambda x, y.y \\ \textit{if-then-else} & = & \lambda b, x_1, x_2.b\ x_1\ x_2 \end{array}$$

$$\textit{if-then-else true } e_1\ e_2 = (\lambda b, x_1, x_2.b\ x_1\ x_2)\ (\lambda x, y.x)\ e_1\ e_2 \xrightarrow{no,\beta,3} (\lambda x, y.x)\ e_1\ e_2 \xrightarrow{no,\beta,2} e_1$$

$$\textit{if-then-else false } e_1\ e_2 = (\lambda b, x_1, x_2.b\ x_1\ x_2)\ (\lambda x, y.y)\ e_1\ e_2 \xrightarrow{no,\beta,3} (\lambda x, y.y)\ e_1\ e_2 \xrightarrow{no,\beta,2} e_2$$

Lambda-Kalkül und Haskell

Aber: Kompliziert;

- Daten und Funktionen sind nicht unterscheidbar;
- Typisierung: ?
- passt nicht zur Intuition von verschiedenen Datentypen
  (und auch nicht zu Haskell)

Wie erkennt man:

- was ein Ergebnis bedeutet?
- wann sind zwei Ergebnisse gleich?
  - syntaktisch gleich ?
  - gleiche Funktionalität?

Lambda-Kalkül und Haskell (2)

Im Lambda Kalkül:

- Rekursive Funktionen??: Geht nur über Fixpunkt-Kombinatoren:

  Fakultät als Beispiel:

$$\begin{aligned}\texttt{fak} = {} & (\lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))) \\ & (\lambda f.\lambda x.\texttt{if}\ x = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ x * (f\ (x-1)))\end{aligned}$$

  Aber: schwer lesbar und der Ablauf ist nicht einfach erkennbar

Lambda-Kalkül und Haskell (2)

Im Lambda Kalkül:

- Rekursive Funktionen??: Geht nur über Fixpunkt-Kombinatoren:

  Fakultät als Beispiel:

$$\begin{aligned}\texttt{fak} = {} & (\lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))) \\ & (\lambda f.\lambda x.\texttt{if}\ x = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ x * (f\ (x-1)))\end{aligned}$$

  Aber: schwer lesbar und der Ablauf ist nicht einfach erkennbar

- Typisierung fehlt! Aber Haskell ist polymorph getypt.

Lambda-Kalkül und Haskell (2)

Im Lambda Kalkül:

- Rekursive Funktionen??: Geht nur über Fixpunkt-Kombinatoren:

  Fakultät als Beispiel:

  $$\begin{aligned}\texttt{fak} = {} & (\lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))) \\ & (\lambda f.\lambda x.\texttt{if}\ x = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ x * (f\ (x - 1)))\end{aligned}$$

  Aber: schwer lesbar und der Ablauf ist nicht einfach erkennbar

- Typisierung fehlt! Aber Haskell ist polymorph getypt.
- Kein `seq`: In Haskell ist `seq` verfügbar, im Lambda-Kalkül nicht kodierbar.

Kernsprachen für Haskell

- Im folgenden führen wir eine Hierarchie von Kernsprachen ein.
  λ-Kalkül $\subset$ KFPT ... $\subset$ ... Haskell
  ($\subset$ für Konstrukte, nicht die vollen Sprachen)
- **Ziel:** verstehen der verschiedenen Schichten und Komponenten von Haskell als Programmiersprache.
- Alle Kernsprachen sind Erweiterungen des Lambda-Kalküls
- Bezeichnungen: KFP...
- KFP = Kern einer Funktionalen Programmiersprache

Die Kernsprache KFPT

- Erweiterung des Lambda-Kalküls um Datentypen (Konstruktoren) und case.
- KFPT: T steht für getyptes case

- !! KFPT erlaubt Typkonstrukte, aber es gibt KEINE syntaktische Prüfung ob die Programme typfehlerfrei sind.

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von Typen (das sind nur Namen)

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von Typen (das sind nur Namen)

Beispiele

- Typ `Bool`,
- Typ `List`,

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von Typen (das sind nur Namen)
- Für jeden Typ gibt es eine endliche Menge von Datenkonstruktoren: Formale Notation: c_i.

Beispiele

- Typ `Bool`,
- Typ `List`,

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von Typen (das sind nur Namen)
- Für jeden Typ gibt es eine endliche Menge von Datenkonstruktoren: Formale Notation: c_i.

Beispiele

- Typ `Bool`, Datenkonstruktoren: `True` und `False`
- Typ `List`, Datenkonstruktoren: `Nil` und `Cons`

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von Typen (das sind nur Namen)
- Für jeden Typ gibt es eine endliche Menge von Datenkonstruktoren: Formale Notation: c_i.
- Datenkonstruktoren haben eine Stelligkeit $\mathrm{ar}(c_i) \in \mathbb{N}_0$ ($\mathrm{ar} =$ „arity“)

Beispiele

- Typ `Bool`, Datenkonstruktoren: `True` und `False`
- Typ `List`, Datenkonstruktoren: `Nil` und `Cons`

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von Typen (das sind nur Namen)
- Für jeden Typ gibt es eine endliche Menge von Datenkonstruktoren: Formale Notation: c_i.
- Datenkonstruktoren haben eine Stelligkeit $\mathrm{ar}(c_i) \in \mathbb{N}_0$ (ar = „arity“)

Beispiele

- Typ `Bool`, Datenkonstruktoren: `True` und `False`, $\mathrm{ar}(\texttt{True}) = 0 = \mathrm{ar}(\texttt{False})$.
- Typ `List`, Datenkonstruktoren: `Nil` und `Cons`, $\mathrm{ar}(\texttt{Nil}) = 0$ und $\mathrm{ar}(\texttt{Cons}) = 2$.

Datentypen

Annahmen:

- Es gibt eine (endliche) Menge von Typen (das sind nur Namen)
- Für jeden Typ gibt es eine endliche Menge von Datenkonstruktoren: Formale Notation: c_i.
- Datenkonstruktoren haben eine Stelligkeit $\mathrm{ar}(c_i) \in \mathbb{N}_0$ (ar = „arity“)

Beispiele

- Typ `Bool`, Datenkonstruktoren: `True` und `False`, $\mathrm{ar}(\texttt{True}) = 0 = \mathrm{ar}(\texttt{False})$.
- Typ `List`, Datenkonstruktoren: `Nil` und `Cons`, $\mathrm{ar}(\texttt{Nil}) = 0$ und $\mathrm{ar}(\texttt{Cons}) = 2$.

  Haskell-Schreibweise: `[]` für `Nil` und `:` (infix) für `Cons`

  Beachte $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ist Abkürzung für $a_1 : (a_2 : (\ldots : (a_n : [])))$

Syntax von KFPT

$$
\begin{array}{llr}
\mathbf{Expr} ::= V & & \text{(Variable)} \\
\quad \mid \ \lambda V.\mathbf{Expr} & & \text{(Abstraktion)} \\
\quad \mid \ (\mathbf{Expr}_1 \ \mathbf{Expr}_2) & & \text{(Anwendung)} \\
\quad \mid & &
\end{array}
$$

Syntax von KFPT

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

$\mathbf{Expr} ::= V$	(Variable)
$\mid \lambda V.\mathbf{Expr}$	(Abstraktion)
$\mid (\mathbf{Expr}_1\ \mathbf{Expr}_2)$	(Anwendung)
$\mid (c_i\ \mathbf{Expr}_1\ \ldots\ \mathbf{Expr}_{\mathrm{ar}(c_i)})$	(Konstruktoranwendung)
$\mid (\mathtt{case}_{\mathtt{Typname}}\ \mathbf{Expr}\ \mathtt{of}$ $\{\mathbf{Pat}_1 \to \mathbf{Expr}_1; \ldots; \mathbf{Pat}_n \to \mathbf{Expr}_n\})$	(case-Ausdruck)
$\mathbf{Pat}_i ::= (c_i\ V_1 \ldots V_{ar(c_i)})$ wobei die Variablen V_i alle verschieden sind.	(Pattern für Konstruktor i)

Nebenbedingungen:

- case mit Typ gekennzeichnet,
- $\mathbf{Pat}_i \to \mathbf{Expr}_i$ heißt case-Alternative
- case-Alternativen sind vollständig und disjunkt für den Typ: für jeden Konstruktor des Typs kommt genau eine Alternative vor.

Beispiele (1)

Erstes Element einer Liste (head):

$$\lambda xs.\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ xs\ \mathtt{of}\ \{\mathtt{Nil} \to \bot; (\mathtt{Cons}\ y\ ys) \to y\}$$

Beispiele (1)

Erstes Element einer Liste (head):

$$\lambda xs.\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ xs\ \mathtt{of}\ \{\mathtt{Nil} \to \bot; (\mathtt{Cons}\ y\ ys) \to y\}$$

Restliste ohne erstes Element (tail):

$$\lambda xs.\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ xs\ \mathtt{of}\ \{\mathtt{Nil} \to \bot; (\mathtt{Cons}\ y\ ys) \to ys\}$$

$\bot$ repräsentiert Fehler, z.B Ω

Beispiele (1)

Erstes Element einer Liste (head):

$$\lambda xs.\texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \to \bot; (\texttt{Cons}\ y\ ys) \to y\}$$

Restliste ohne erstes Element (tail):

$$\lambda xs.\texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \to \bot; (\texttt{Cons}\ y\ ys) \to ys\}$$

$\bot$ repräsentiert Fehler, z.B Ω

Test, ob Liste leer ist (null):

$$\lambda xs.\texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \to \texttt{True}; (\texttt{Cons}\ y\ ys) \to \texttt{False}\}$$

Beispiele (1)

Erstes Element einer Liste (head):

$$\lambda xs.\texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \to \bot; (\texttt{Cons}\ y\ ys) \to y\}$$

Restliste ohne erstes Element (tail):

$$\lambda xs.\texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \to \bot; (\texttt{Cons}\ y\ ys) \to ys\}$$

$\bot$ repräsentiert Fehler, z.B Ω

Test, ob Liste leer ist (null):

$$\lambda xs.\texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \to \texttt{True}; (\texttt{Cons}\ y\ ys) \to \texttt{False}\}$$

If-Then-Else:

$\texttt{if}\ e\ \texttt{then}\ s\ \texttt{else}\ t$:

$$\texttt{case}_{\texttt{Bool}}\ e\ \texttt{of}\ \{\texttt{True} \to s; \texttt{False} \to t\}$$

Beispiele (2)

- Paare: Typ `Paar` mit zweistelligem Konstruktor `Paar`
  Z.B. wird $(\texttt{True}, \texttt{False})$ durch $(\texttt{Paar True False})$ dargestellt.
- Projektionen:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{fst} & := & \lambda x.\texttt{case}_{\texttt{Paar}}\ x\ \texttt{of}\ \{(\texttt{Paar}\ a\ b) \to a\} \\
\mathit{snd} & := & \lambda x.\texttt{case}_{\texttt{Paar}}\ x\ \texttt{of}\ \{(\texttt{Paar}\ a\ b) \to b\}
\end{array}
$$

- Analog: mehrstellige Tupel
- In Haskell sind Tupel bereits vorhanden (eingebaut), Schreibweise $(a_1, \ldots, a_n)$
- In Haskell auch 0-stellige Tupel, keine 1-stelligen Tupel

Haskell vs. KFPT: case-Ausdrücke (1)

Vergleich mit Haskells `case`**-Ausdrücken**

- Syntax ähnlich:
  - Statt $\rightarrow$ in Haskell: `->`
  - Keine Typmarkierung am `case`

Beispiel:

- KFPT: $\texttt{case}_{List}\ xs\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \rightarrow \texttt{Nil}; (\texttt{Cons}\ y\ ys) \rightarrow y\}$
- Haskell: `case     xs of [] -> []; (y:ys) -> y`

Haskell vs. KFPT: case-Ausdrücke (1)

Vergleich mit Haskells `case`-Ausdrücken

- Syntax ähnlich:
  - Statt $\rightarrow$ in Haskell: `->`
  - Keine Typmarkierung am `case`

  Beispiel:
  - KFPT: $\texttt{case}_{List}\ xs\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \rightarrow \texttt{Nil}; (\texttt{Cons}\ y\ ys) \rightarrow y\}$
  - Haskell: `case xs of [] -> []; (y:ys) -> y`
- In Haskell ist es nicht notwendig alle Konstruktoren abzudecken
- Es kann Laufzeitfehler (in Haskell) geben:

```
(case True of False -> False)
*** Exception: Non-exhaustive patterns in case
```

Haskell vs. KFPT: case-Ausdrücke (2)

- KFPT erlaubt nur disjunkte Pattern!
- Haskell erlaubt überlappende Pattern und geschachtelte Pattern. Z.B. ist

  `case [] of {[] -> []; (x:(y:ys)) -> [y]; x -> []}`

  ein gültiger Haskell-Ausdruck
- Semikolon und Klammern kann man bei Einrückung weglassen:

```
 case [] of
         [] -> []
         (x:(y:ys)) -> [y]
         x -> []
```

Haskell vs. KFPT: case-Ausdrücke (3)

Übersetzung von geschachtelten (Haskell) in einfache Pattern (für KFPT)

```
case [] of {[] -> []; (x:(y:ys)) -> [y]}
```

wird übersetzt in:

$$
\begin{array}{l}
\texttt{case}_{\texttt{List}}\ \texttt{Nil}\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\
\qquad (\texttt{Cons x z}) \to \texttt{case}_{\texttt{List}}\ \texttt{z}\ \texttt{of}\ \{\texttt{Nil} \to \bot;\\
\qquad\qquad (\texttt{Cons y ys}) \to (\texttt{Cons y Nil})\\
\qquad\qquad \}\\
\qquad \}
\end{array}
$$

- Fehlende Alternativen werden durch $Pat \to \bot$ ergänzt.
- $\bot$ (gesprochen als „bot"): Repräsentant eines geschlossenen nicht terminierenden Ausdrucks.
- Abkürzung: $(\texttt{case}_{Typ}\ s\ \texttt{of}\ Alts)$

Freie und gebundene Variablen in KFPT

Zusätzlich zum Lambda-Kalkül:

In einer case-Alternative

$$(c_i\ x_1\ \ldots\ x_{\mathrm{ar}(c_i)}) \to s$$

sind die Variablen $x_1, \ldots, x_{\mathrm{ar}(c_i)}$ in s gebunden.

Freie Variablen in Ausdrücken

$$
\begin{array}{ll}
FV(x) & = x \\
FV(\lambda x.s) & = FV(s) \setminus \{x\} \\
FV(s\ t) & = FV(s) \cup FV(t) \\
FV(c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)}) & = FV(s_1) \cup \ldots \cup FV(s_{\mathrm{ar}(c_i)}) \\
FV(\texttt{case}_{Typ}\ t\ \texttt{of} & = FV(t) \cup (\bigcup\limits_{i=1}^{n} (FV(s_i) \setminus \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,\mathrm{ar}(c_i)}\})) \\
\quad \{(c_1\ x_{1,1}\ \ldots\ x_{1,\mathrm{ar}(c_1)}) \rightarrow s_1; & \\
\quad\ \ldots & \\
\quad\ (c_n\ x_{n,1}\ \ldots\ x_{n,\mathrm{ar}(c_n)}) \rightarrow s_n\}) &
\end{array}
$$

Gebundene Variablen in Ausdrücken

$$
\begin{array}{ll}
BV(x) & = \emptyset \\
BV(\lambda x.s) & = BV(s) \cup \{x\} \\
BV(s\ t) & = BV(s) \cup BV(t) \\
BV(c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)}) & = BV(s_1) \cup \ldots \cup BV(s_{\mathrm{ar}(c_i)}) \\
BV(\texttt{case}_{Typ}\ t\ \texttt{of} & = BV(t) \cup (\bigcup\limits_{i=1}^{n} (BV(s_i) \cup \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,\mathrm{ar}(c_i)}\})) \\
\quad \{(c_1\ x_{1,1}\ \ldots\ x_{1,\mathrm{ar}(c_1)}) \to s_1; & \\
\quad\ \ldots & \\
\quad\ (c_n\ x_{n,1}\ \ldots\ x_{n,\mathrm{ar}(c_n)}) \to s_n\}) &
\end{array}
$$

Beispiel

$$s := ((\lambda x.\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ x\ \mathtt{of}\ \{\mathtt{Nil} \rightarrow x; \mathtt{Cons}\ x\ xs\ \rightarrow \lambda u.(x\ \lambda x.(x\ u))\})\ x)$$

$FV(s) = \{x\}$ und $BV(s) = \{x, xs, u\}$

Alpha-äquivalenter Ausdruck:

$$s' := ((\lambda x_1.\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ x_1\ \mathtt{of}\ \{\mathtt{Nil} \rightarrow x_1; \mathtt{Cons}\ x_2\ xs\ \rightarrow \lambda u.(x_2\ \lambda x_3.(x_3\ u))\})\ x)$$

$FV(s') = \{x\}$ und $BV(s') = \{x_1, x_2, xs, x_3, u\}$

Operationale Semantik von KFPT

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Substitution

- $s[t/x]$ ersetzt alle freien Vorkommen von x in s durch t (wenn $BV(s) \cap FV(t) = \emptyset$)
- $s[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ parallele Ersetzung von $x_1, \ldots, x_n$ durch $t_1, \ldots, t_n$ (wenn für alle i:$BV(s) \cap FV(t_i) = \emptyset$)

Operationale Semantik von KFPT

Substitution

- $s[t/x]$ ersetzt alle freien Vorkommen von x in s durch t (wenn $BV(s) \cap FV(t) = \emptyset$)
- $s[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ parallele Ersetzung von $x_1, \ldots, x_n$ durch $t_1, \ldots, t_n$ (wenn für alle i:$BV(s) \cap FV(t_i) = \emptyset$)

Definition

Die einzigen Reduktionsregeln in KFPT sind (β) und (case):

(β) $\quad (\lambda x.s)\ t \to s[t/x]$

(case) $\quad \texttt{case}_{Typ}\ (c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})\ \texttt{of}\ \{\ldots;\ (c\ x_1 \ldots\ x_{\mathrm{ar}(c)}) \to t;\ \ \ldots\}$
$\quad \to t[s_1/x_1, \ldots, s_{\mathrm{ar}(c)}/x_{\mathrm{ar}(c)}]$

Wenn $s \to t$ mit (β) oder (case) dann reduziert s unmittelbar zu t

Beispiel

$$(\lambda x.\texttt{case}_{\texttt{Paar}}\ x\ \texttt{of}\ \{(\texttt{Paar}\ a\ b) \rightarrow a\})\ (\texttt{Paar True False})$$

Beispiel

$$(\lambda x.\texttt{case}_{\texttt{Paar}}\ x\ \texttt{of}\ \{(\texttt{Paar}\ a\ b) \to a\})\ (\texttt{Paar True False})$$

$$\xrightarrow{\beta} \quad \texttt{case}_{\texttt{Paar}}\ (\texttt{Paar True False})\ \texttt{of}\ \{(\texttt{Paar}\ a\ b) \to a\}$$

Beispiel

$$
\begin{array}{ll}
 & (\lambda x.\texttt{case}_{\texttt{Paar}}\ x\ \texttt{of}\ \{(\texttt{Paar}\ a\ b) \to a\})\ (\texttt{Paar True False}) \\
\xrightarrow{\beta} & \texttt{case}_{\texttt{Paar}}\ (\texttt{Paar True False})\ \texttt{of}\ \{(\texttt{Paar}\ a\ b) \to a\} \\
\xrightarrow{case} & \texttt{True}
\end{array}
$$

KFPT-Kontexte

Kontext = Ausdruck mit Loch $[\cdot]$

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{C} ::= & [\cdot] \mid \lambda V.\mathbf{C} \mid (\mathbf{C}\ \mathbf{Expr}) \mid (\mathbf{Expr}\ \mathbf{C}) \\
\mid & (c_i\ \mathbf{Expr}_1\ \ldots \mathbf{Expr}_{i-1}\ \mathbf{C}\ \mathbf{Expr}_{i+1}\ \mathbf{Expr}_{\mathrm{ar}(c_i)}) \\
\mid & (\mathtt{case}_{\mathtt{Typ}}\ \mathbf{C}\ \mathtt{of}\ \{\mathbf{Pat}_1 \to \mathbf{Expr}_1; \ldots ; \mathbf{Pat}_n \to \mathbf{Expr}_n\}) \\
\mid & (\mathtt{case}_{\mathtt{Typ}}\ \mathbf{Expr}\ \mathtt{of}\ \{\mathbf{Pat}_1 \to \mathbf{Expr}_1; \ldots ; \mathbf{Pat}_i \to \mathbf{C}; \ldots , \mathbf{Pat}_n \to \mathbf{Expr}_n\})
\end{array}
$$

KFPT-Kontexte

Kontext = Ausdruck mit Loch $[\cdot]$

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{C} ::= [\cdot] \mid \lambda V.\mathbf{C} \mid (\mathbf{C}\ \mathbf{Expr}) \mid (\mathbf{Expr}\ \mathbf{C}) \\
\quad \mid \ (c_i\ \mathbf{Expr}_1\ \ldots \mathbf{Expr}_{i-1}\ \mathbf{C}\ \mathbf{Expr}_{i+1}\ \mathbf{Expr}_{\mathrm{ar}(c_i)}) \\
\quad \mid \ (\mathtt{case}_{\mathtt{Typ}}\ \mathbf{C}\ \mathtt{of}\ \{\mathbf{Pat}_1 \to \mathbf{Expr}_1; \ldots ; \mathbf{Pat}_n \to \mathbf{Expr}_n\}) \\
\quad \mid \ (\mathtt{case}_{\mathtt{Typ}}\ \mathbf{Expr}\ \mathtt{of}\ \{\mathbf{Pat}_1 \to \mathbf{Expr}_1; \ldots ; \mathbf{Pat}_i \to \mathbf{C}; \ldots, \mathbf{Pat}_n \to \mathbf{Expr}_n\})
\end{array}
$$

Wenn $C[s] \to C[t]$ wobei $s \xrightarrow{\beta} t$ oder $s \xrightarrow{case} t$, dann bezeichnet man s (mit seiner Position in C) als Redex von $C[s]$.

Redex = Reducible expression

Normalordnungsreduktion in KFPT

Definition

Reduktionskontexte R in KFPT werden durch die folgende Grammatik erzeugt:

$$\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R}\ \mathbf{Expr}) \mid (\mathtt{case}_{Typ}\ \mathbf{R}\ \mathtt{of}\ Alts)$$

Normalordnungsreduktionen finden in Reduktionskontexten statt

Normalordnungsreduktion in KFPT

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Definition

Reduktionskontexte R in KFPT werden durch die folgende Grammatik erzeugt:

$$\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R}\ \mathbf{Expr}) \mid (\mathtt{case}_{Typ}\ \mathbf{R}\ \mathtt{of}\ Alts)$$

Normalordnungsreduktionen finden in Reduktionskontexten statt

Redexsuche in KFPT mit $*$ zum Verschieben

- $(s_1\ s_2)^\star \Rightarrow (s_1^\star\ s_2)$

Neue Regel:

- $(\mathtt{case}_{Typ}\ \mathtt{s}\ \mathtt{of}\ Alts)^\star \Rightarrow (\mathtt{case}_{Typ}\ \mathtt{s}^\star\ \mathtt{of}\ Alts)$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\, y\ \texttt{of}\ \{ \\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil}; \\ (\texttt{Cons}\, z\, zs) \to (x\, z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))\ (\lambda u, v.v))\ (\texttt{Cons}\,(\lambda w.w)\,\texttt{Nil}))^{\star}$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\left(\begin{array}{l}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ \ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{array}\right)\ \texttt{True}))\ (\lambda u, v.v))^{\star}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\, y \,\texttt{of}\, \{ \\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil}; \\ (\texttt{Cons}\, z\, zs) \to (x\, z)\}\end{pmatrix}\, \texttt{True}))^{\star}\, (\lambda u, v.v))\, (\texttt{Cons}\, (\lambda w.w)\, \texttt{Nil}))$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))^{\star}\ (\lambda u, v.v))\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))^{\star}$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))^{\star}\ (\lambda u, v.v))\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))^{\star}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\begin{pmatrix}\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ y\ \mathtt{of}\ \{\\ \mathtt{Nil} \to \mathtt{Nil};\\ (\mathtt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{pmatrix}\ \mathtt{True}))^{\star}\ (\lambda u, v.v))\ (\mathtt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \mathtt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda y.(\begin{pmatrix}\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ y\ \mathtt{of}\ \{\\ \mathtt{Nil} \to \mathtt{Nil};\\ (\mathtt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \mathtt{True}))^{\star}\ (\mathtt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \mathtt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad (\begin{pmatrix}\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ (\mathtt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \mathtt{Nil})\ \mathtt{of}\ \{\\ \mathtt{Nil} \to \mathtt{Nil};\\ (\mathtt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \mathtt{True})^{\star}$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.\left(\begin{array}{l}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{array}\right)\ \texttt{True}))^{\star}\ (\lambda u, v.v))\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda y.\left(\begin{array}{l}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{array}\right)\ \texttt{True}))^{\star}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad (\left(\begin{array}{l}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil})\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{array}\right)^{\star}\ \texttt{True})$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\; y \;\texttt{of}\; \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\; z\; zs) \to (x\; z)\}\end{pmatrix}\; \texttt{True}))^{\star}\; (\lambda u, v.v))\; (\texttt{Cons}\; (\lambda w.w)\; \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta} \quad ((\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\; y \;\texttt{of}\; \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\; z\; zs) \to ((\lambda u, v.v)\; z)\}\end{pmatrix}\; \texttt{True}))^{\star}\; (\texttt{Cons}\; (\lambda w.w)\; \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta} \quad (\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\; (\texttt{Cons}\; (\lambda w.w)\; \texttt{Nil})^{\star} \;\texttt{of}\; \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\; z\; zs) \to ((\lambda u, v.v)\; z)\}\end{pmatrix}\; \texttt{True})$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))^{\star}\ (\lambda u,v.v))\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u,v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))^{\star}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad (\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil})^{\star}\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u,v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True})$$

$$\xrightarrow{no,case}\ (((\lambda u,v.v)\ (\lambda w.w))\ \texttt{True})^{\star}$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{ \\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil}; \\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))^{\star}\ (\lambda u, v.v))\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{ \\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil}; \\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))^{\star}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad (\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil})^{\star}\ \texttt{of}\ \{ \\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil}; \\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True})$$

$$\xrightarrow{no,case}\ (((\lambda u, v.v)\ (\lambda w.w))^{\star}\ \texttt{True})$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.\left(\begin{array}{l}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{array}\right)\ \texttt{True}))^{\star}\ (\lambda u, v.v))\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda y.\left(\begin{array}{l}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{array}\right)\ \texttt{True}))^{\star}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad (\left(\begin{array}{l}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil})^{\star}\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{array}\right)\ \texttt{True})$$

$$\xrightarrow{no,case}\ (((\lambda u, v.v)^{\star}\ (\lambda w.w))\ \texttt{True})$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.\left(\begin{array}{l}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{array}\right)\ \texttt{True}))^{\star}\ (\lambda u,v.v))\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda y.\left(\begin{array}{l}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u,v.v)\ z)\}\end{array}\right)\ \texttt{True}))^{\star}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad (\left(\begin{array}{l}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil})^{\star}\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u,v.v)\ z)\}\end{array}\right)\ \texttt{True})$$

$$\xrightarrow{no,case}\ (((\lambda u,v.v)^{\star}\ (\lambda w.w))\ \texttt{True})$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda v.v)\ \texttt{True})^{\star}$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))^{\star}\ (\lambda u, v.v))\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda y.(\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ y\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True}))^{\star}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad (\begin{pmatrix}\texttt{case}_{\texttt{List}}\ (\texttt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \texttt{Nil})^{\star}\ \texttt{of}\ \{\\ \texttt{Nil} \to \texttt{Nil};\\ (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \texttt{True})$$

$$\xrightarrow{no,case}\ (((\lambda u, v.v)^{\star}\ (\lambda w.w))\ \texttt{True})$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda v.v)^{\star}\ \texttt{True})$$

Beispiel (ohne Umbenennungen)

$$(((\lambda x.\lambda y.(\begin{pmatrix}\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ y\ \mathtt{of}\ \{\\ \mathtt{Nil} \to \mathtt{Nil};\\ (\mathtt{Cons}\ z\ zs) \to (x\ z)\}\end{pmatrix}\ \mathtt{True}))^{\star}\ (\lambda u, v.v))\ (\mathtt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \mathtt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda y.(\begin{pmatrix}\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ y\ \mathtt{of}\ \{\\ \mathtt{Nil} \to \mathtt{Nil};\\ (\mathtt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \mathtt{True}))^{\star}\ (\mathtt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \mathtt{Nil}))$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad (\begin{pmatrix}\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ (\mathtt{Cons}\ (\lambda w.w)\ \mathtt{Nil})^{\star}\ \mathtt{of}\ \{\\ \mathtt{Nil} \to \mathtt{Nil};\\ (\mathtt{Cons}\ z\ zs) \to ((\lambda u, v.v)\ z)\}\end{pmatrix}\ \mathtt{True})$$

$$\xrightarrow{no,case}\quad (((\lambda u, v.v)^{\star}\ (\lambda w.w))\ \mathtt{True})$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad ((\lambda v.v)^{\star}\ \mathtt{True})$$

$$\xrightarrow{no,\beta}\quad \mathtt{True}$$

Normalordnungsreduktion (2)

Definition

Wenn s unmittelbar zu t reduziert, dann ist $R[s] \to R[t]$ für jeden Reduktionskontext R eine Normalordnungsreduktion.

- Notation: $\xrightarrow{no}$, bzw. auch $\xrightarrow{no,\beta}$ und $\xrightarrow{no,case}$.
- $\xrightarrow{no,+}$ transitive Hülle von $\xrightarrow{no}$
- $\xrightarrow{no,*}$ reflexiv-transitive Hülle von $\xrightarrow{no}$

Normalformen

Ein KFPT-Ausdruck s ist eine

- Normalform (NF = normal form), wenn:
  s enthält keine (β)- oder (case)-Redexe
- Kopfnormalform (HNF = head normal form), wenn:
  s ist Konstruktoranwendung oder Abstraktion $\lambda x_1, \ldots x_n.s'$, wobei s' entweder Variable oder $(c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})$ oder $(x\ s'')$ ist
- schwache Kopfnormalform (WHNF = weak head normal form): s ist eine FWHNF oder eine CWHNF.
- funktionale schwache Kopfnormalform (FWHNF = functional whnf):
  s ist eine Abstraktion
- Konstruktor-schwache Kopfnormalform (CWHNF = constructor whnf):
  s ist eine Konstruktoranwendung $(c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})$

Wir verwenden nur WHNFs in KFPT (keine NFs, keine HNFs).

Beispiel

$(\lambda x.(\ (\lambda y.y)\ (\lambda z.z)\ ))$ FWHNF

$(\texttt{Cons True}\ (\ (\lambda y.y)\ \texttt{Nil}))$ CWHNF

Normalformen

Warum **schwach?** (Kopf-Normalform)

Normalformen

Warum **schwach?** (Kopf-Normalform)

Schwach: Weil es unausgewertete Unterausdrücke in der Normalform geben kann.

Grund für schwache statt starke WHNF:
damit es zur Reduktionsstrategie passt.
Strategie ist: Normalordnungsreduktion
D.h. nicht alles in einer WHNF ist ausgewertet.

Normalformen

Warum **schwach?** (Kopf-Normalform)

Schwach: Weil es unausgewertete Unterausdrücke in der Normalform geben kann.

Grund für schwache statt starke WHNF:
damit es zur Reduktionsstrategie passt.
Strategie ist: Normalordnungsreduktion
D.h. nicht alles in einer WHNF ist ausgewertet.

NF und HNF passen jeweils zu anderen Reduktions-Strategien.

Terminierung bzw. Konvergenz

Definition

Ein KFPT-Ausdruck s konvergiert (oder *terminiert*, notiert als $s\Downarrow$) genau dann, wenn:

$$s\Downarrow \iff \exists \text{ WHNF } t : s \xrightarrow{no,*} t$$

Falls s nicht konvergiert, so sagen wir s divergiert (terminiert nicht bzw. terminiert nicht mit WHNF) und notieren dies mit $s\Uparrow$.

Sprechweisen:

Wir sagen s hat eine WHNF (bzw. FWHNF, CWHNF), wenn s zu einer WHNF (bzw. FWHNF, CWHNF) mit $\xrightarrow{no,*}$ reduziert werden kann.

Lambda Kalkül und Typisierung

- Im puren Lambda Kalkül gibt es keine Typisierung.
- Typisierung benutzt man: wenn man
  z.B. Daten und Funktionen unterscheiden will.
  bzw. wenn man die erlaubten Argumente beschränken will.
  Z.B. Funktionen höherer Ordnung.
- ... und dann geht es weiter ... mit Typen
- - verschiedene Art von Daten
- - verschiedene Funktionalitäten. ...

Wir betrachten erst dynamische Typisierung,
später statische Typisierung

Lambda Kalkül und Typisierung

- Im puren Lambda Kalkül gibt es keine Typisierung.
- Typisierung benutzt man: wenn man
  z.B. Daten und Funktionen unterscheiden will.
  bzw. wenn man die erlaubten Argumente beschränken will.
  Z.B. Funktionen höherer Ordnung.
- . . . und dann geht es weiter . . . mit Typen
- - verschiedene Art von Daten
- - verschiedene Funktionalitäten. . . .

Wir betrachten erst dynamische Typisierung,
später statische Typisierung

Lambda Kalkül und Typisierung

- Im puren Lambda Kalkül gibt es keine Typisierung.
- Typisierung benutzt man: wenn man
  z.B. Daten und Funktionen unterscheiden will.
  bzw. wenn man die erlaubten Argumente beschränken will.
  Z.B. Funktionen höherer Ordnung.
- . . . und dann geht es weiter . . . mit Typen
- - verschiedene Art von Daten
- - verschiedene Funktionalitäten. . . .

Wir betrachten erst dynamische Typisierung,
später statische Typisierung

Lambda Kalkül und Typisierung

- Im puren Lambda Kalkül gibt es keine Typisierung.
- Typisierung benutzt man: wenn man
  z.B. Daten und Funktionen unterscheiden will.
  bzw. wenn man die erlaubten Argumente beschränken will.
  Z.B. Funktionen höherer Ordnung.
- . . . und dann geht es weiter . . . mit Typen
- - verschiedene Art von Daten
- - verschiedene Funktionalitäten. . . .

Wir betrachten erst dynamische Typisierung,
später statische Typisierung

Dynamische Typisierung in KFPT

Normalordnungsreduktion in KFPT stoppt ohne WHNF:
Fälle:

- eine freie Variable ist potentieller Redex
  (Ausdruck von der Form $R[x]$), oder
- ein dynamischer Typfehler tritt auf.

Dynamische Typisierung in KFPT

Normalordnungsreduktion in KFPT stoppt ohne WHNF:
Fälle:

- eine freie Variable ist potentieller Redex
  (Ausdruck von der Form $R[x]$), oder
- ein dynamischer Typfehler tritt auf.

Definition (Dynamische Typregeln für KFPT)

Ein KFPT-Ausdruck s direkt dynamisch ungetypt, falls:

- $s = R[\texttt{case}_T\ (c\ s_1\ \ldots\ s_n)\ \texttt{of}\ Alts]$ und $(c \ldots)$ ist *nicht* vom Typ T
- $s = R[\texttt{case}_T\ \lambda x.t\ \texttt{of}\ Alts]$.
- $s = R[(c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})\ t]$

Dynamische Typisierung in KFPT

Normalordnungsreduktion in KFPT stoppt ohne WHNF:
Fälle:

- eine freie Variable ist potentieller Redex
  (Ausdruck von der Form $R[x]$), oder
- ein dynamischer Typfehler tritt auf.

Definition (Dynamische Typregeln für KFPT)

Ein KFPT-Ausdruck s direkt dynamisch ungetypt, falls:

- $s = R[\texttt{case}_T\ (c\ s_1\ \ldots\ s_n)\ \texttt{of}\ Alts]$ und $(c \ldots)$ ist *nicht* vom Typ T
- $s = R[\texttt{case}_T\ \lambda x.t\ \texttt{of}\ Alts]$.
- $s = R[(c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})\ t]$

---

s ist dynamisch ungetypt

$$\iff$$

$$\exists t : s \xrightarrow{no,*} t \land t \text{ ist direkt dynamisch ungetypt}$$

Beispiele

- $\texttt{case}_{\texttt{List}}$ $\texttt{True}$ $\texttt{of}$ $\{\texttt{Nil} \to \texttt{Nil}; (\texttt{Cons}\ x\ xs)\ \to\ xs\}$
  ist direkt dynamisch ungetypt
- $(\lambda x.\texttt{case}_{\texttt{List}}\ x$ $\texttt{of}$ $\{\texttt{Nil} \to \texttt{Nil}; (\texttt{Cons}\ x\ xs)\ \to\ xs\})\ \texttt{True}$
  ist dynamisch ungetypt
- $(\texttt{Cons}\ \texttt{True}\ \texttt{Nil})\ (\lambda x.x)$ ist direkt dynamisch ungetypt
- $(\texttt{case}_{\texttt{Bool}}\ x$ $\texttt{of}$ $\{\texttt{True} \to \texttt{True}; \texttt{False} \to \texttt{False}\})$
  ist typ-richtig?
- $(\lambda x.\texttt{case}_{\texttt{Bool}}\ x$ $\texttt{of}$ $\{\texttt{True} \to \texttt{True}; \texttt{False} \to \texttt{False}\})\ (\lambda y.y)$
  ist dynamisch ungetypt

Dynamische Typisierung

Ein geschlossener KFPT-Ausdruck s ist direkt dynamisch getypt, (bzgl. der Normalordnung) wenn

- es eine WHNF ist, oder
- eine Normalordnungsreduktion möglich ist.

Ein geschlossener KFPT-Ausdruck s ist dynamisch getypt, (bzgl. der Normalordnung) wenn es eine Normalordnungsreduktionsfolge bis zu einer WHNF gibt oder eine unendliche Normalordnungsreduktions-Folge

Beachte: Unterausdrücke könnten dynamisch ungetypt sein

Dynamische Typisierung (2)

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Satz (Progress Lemma)

Ein geschlossener KFPT-Ausdruck s ist irreduzibel (bzgl. der Normalordnung) genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen auf ihn zutrifft:

- Entweder ist s eine WHNF, oder
- s ist direkt dynamisch ungetypt.

Fortschrittseigenschaft (des Kalküls)

(Progress property): Es gilt immer:
Wenn t geschlossen, keine WHNF und direkt dynamisch getypt ist, dann kann man eine Normalordnungsreduktion auf t durchführen.

Es fehlt noch: Zusammenhang zwischen Typisierung und mehreren Normalordnungs-Reduktionen !?

Beispiele

Was ist mit $1/0$ in Haskell?

$1/0$ ist in Haskell als externer Aufruf definiert.
Intern würde man es so machen:
case-Ausdruck mit Ω als Ausgang.
(Wobei Ω ein Ausdruck ist, der alle Typen hat.)
Dann ist $1/0$ getypt, und Reduktion ergibt Nichtterminierung.

Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen

Knoten für je ein syntaktisches Konstrukt des Ausdrucks

- Variablen = ein Blatt

Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen

Knoten für je ein syntaktisches Konstrukt des Ausdrucks

- Variablen = ein Blatt
- Abstraktionen $\lambda x.s$

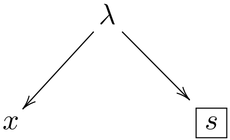
$$\begin{tikzcd} & \lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x & & \boxed{s} \end{tikzcd}$$

wobei $\boxed{s}$ Baum für s

Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen

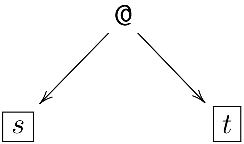
Knoten für je ein syntaktisches Konstrukt des Ausdrucks

- Variablen = ein Blatt
- Abstraktionen $\lambda x.s$



wobei $\boxed{s}$ Baum für s

- Applikationen $(s\ t)$



wobei $\boxed{s}$, $\boxed{t}$ Bäume für s und t

Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen (2)

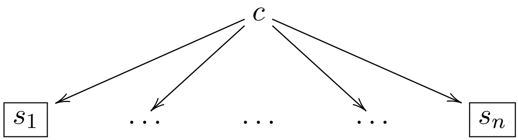
- Konstruktoranwendungen n-stellig: $(c\ s_1 \ldots\ s_n)$

$$\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
\boxed{s_1} & \ldots & \ldots & \ldots & \boxed{s_n}
\end{tikzcd}$$

wobei $\boxed{s_i}$ die Bäume für s_i

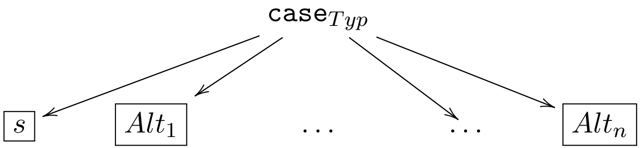
Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen (2)

- Konstruktoranwendungen n-stellig: $(c\ s_1 \ldots\ s_n)$



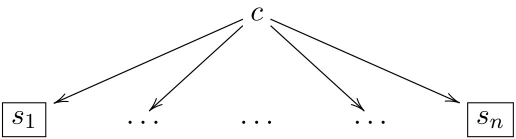
wobei $\boxed{s_i}$ die Bäume für s_i

- case-Ausdrücke: $n+1$ Kinder, $\texttt{case}_{Typ}\ s\ \texttt{of}\ \{Alt_1; \ldots ; Alt_n\}$



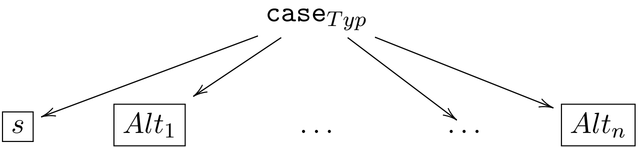
Darstellung von Ausdrücken als Termgraphen (2)

- Konstruktoranwendungen n-stellig: $(c\ s_1 \ldots\ s_n)$

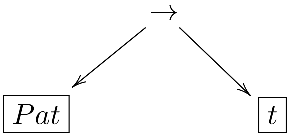


wobei $\boxed{s_i}$ die Bäume für s_i

- case-Ausdrücke: $n+1$ Kinder, $\mathtt{case}_{Typ}\ s\ \mathtt{of}\ \{Alt_1; \ldots; Alt_n\}$



- case-Alternative $Pat \to t$

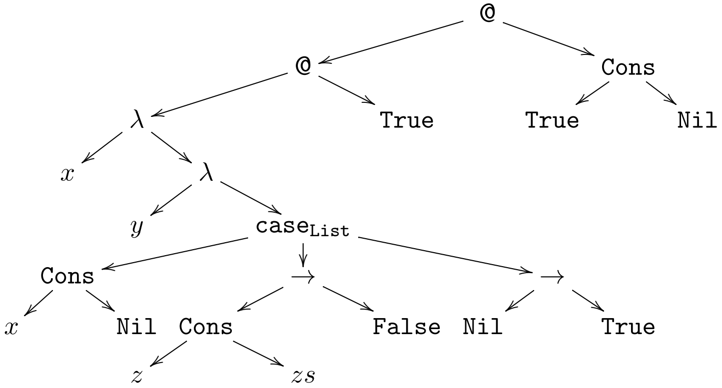


Beispiel

$$\left(\left(\begin{array}{l}\lambda x.\lambda y.\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ (\mathtt{Cons}\ x\ \mathtt{Nil})\ \mathtt{of}\ \{\\ \qquad\qquad (\mathtt{Cons}\ z\ zs) \to \mathtt{False};\\ \qquad\qquad \mathtt{Nil} \to \mathtt{True}\}\end{array}\right)\ \mathtt{True}\right)\ (\mathtt{Cons}\ \mathtt{True}\ \mathtt{Nil})$$

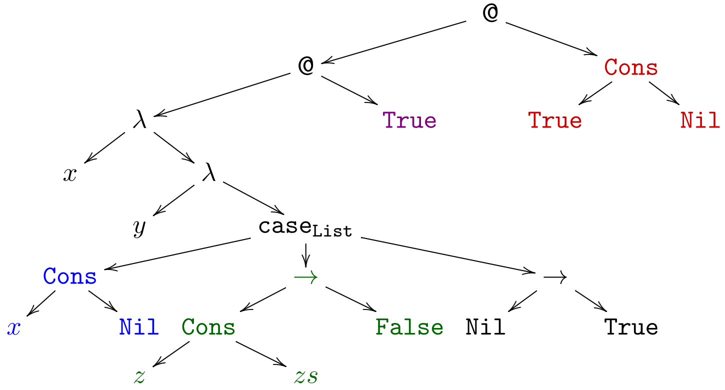
Beispiel

$$\left(\left(\begin{array}{l}\lambda x.\lambda y.\texttt{case}_{\texttt{List}}\ (\texttt{Cons}\ x\ \texttt{Nil})\ \texttt{of}\ \{\\ \qquad\qquad (\texttt{Cons}\ z\ zs) \to \texttt{False};\\ \qquad\qquad \texttt{Nil} \to \texttt{True}\}\end{array}\right)\ \texttt{True}\right)\ (\texttt{Cons True Nil})$$



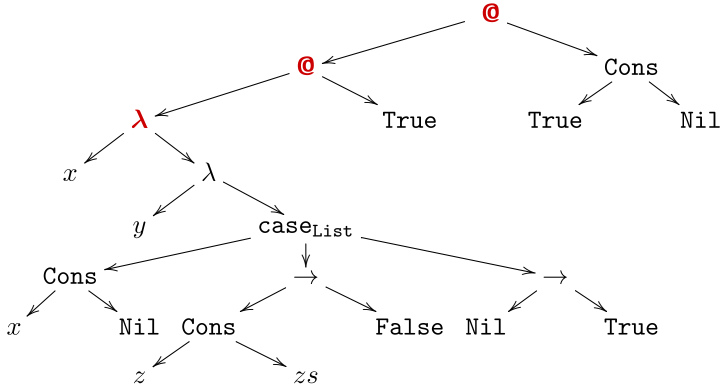
Beispiel

$$\left(\left(\begin{array}{l}\lambda x.\lambda y.\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ (\mathtt{Cons}\ x\ \mathtt{Nil})\ \mathtt{of}\ \{\\ \qquad\qquad (\mathtt{Cons}\ z\ zs) \to \mathtt{False};\\ \qquad\qquad \mathtt{Nil} \to \mathtt{True}\}\end{array}\right)\ \mathtt{True}\right)\ (\mathtt{Cons\ True\ Nil})$$



Beispiel

$$\left(\left(\begin{array}{l}\lambda x.\lambda y.\mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ (\mathtt{Cons}\ x\ \mathtt{Nil})\ \mathtt{of}\ \{\\ \qquad\qquad (\mathtt{Cons}\ z\ zs) \to \mathtt{False};\\ \qquad\qquad \mathtt{Nil} \to \mathtt{True}\}\end{array}\right)\ \mathtt{True}\right)\ (\mathtt{Cons}\ \mathtt{True}\ \mathtt{Nil})$$



NO-Redex-Suche: immer links, bis Abstraktion oder Konstruktoranwendung

Normalordnungsreduktion: Eigenschaften

- Die Normalordnungsreduktion ist deterministisch, d.h. für jedes s gibt es höchstens ein t mit $s \xrightarrow{no} t$.
- Eine WHNF ist irreduzibel bezüglich der Normalordnungsreduktion.

Normalordnungsreduktion: Eigenschaften

- Die Normalordnungsreduktion ist deterministisch, d.h. für jedes s gibt es höchstens ein t mit $s \xrightarrow{no} t$.
- Eine WHNF ist irreduzibel bezüglich der Normalordnungsreduktion.

Satz (Standardisierung für KFPT)

Wenn $s \xrightarrow{*} t$ mit beliebigen (β)- und $(case)$-Reduktionen (in beliebigem Kontext angewendet), und t ist eine WHNF, dann existiert eine WHNF t', so dass $s \xrightarrow{no,*} t'$ und $t' \xrightarrow{*} t$ (unter α-Gleichheit).

$$\begin{tikzcd}
& s \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, dashed, "{no,*}"] & \\
t & & t' \arrow[ll, dashed, "*"] \\
\textit{WHNF} & & \textit{WHNF}
\end{tikzcd}$$

$\xrightarrow{*}$ *beliebige, gegebene Reduktion* $\quad --\rightarrow$ *existierende Reduktion*

KFPT Erweiterung zu KFPTS

KFPTS

Rekursive Superkombinatoren: KFPTS

- **Erweiterung:** KFPT zu KFPTS
- „S“ steht für Superkombinatoren
- Superkombinatoren sind Namen (Konstanten) für Funktionen
- Superkombinatoren dürfen auch rekursiv definiert sein

Annahme: Es gibt eine Menge $\mathcal{SK}$ von Superkombinator**namen**.

Beispiele für Superkombinatoren: `length`, `map`, `sum`,

KFPTS: Syntax

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{Expr} & ::= & V \mid \lambda V.\mathbf{Expr} \mid (\mathbf{Expr}_1\ \mathbf{Expr}_2) \\
& \mid & (c_i\ \mathbf{Expr}_1\ \ldots\ \mathbf{Expr}_{\mathrm{ar}(c_i)}) \\
& \mid & (\mathtt{case}_{\mathtt{Typ}}\ \mathbf{Expr}\ \mathtt{of}\ \{\mathbf{Pat}_1 \to \mathbf{Expr}_1; \ldots ; \mathbf{Pat}_n \to \mathbf{Expr}_n\}) \\
& \mid & SK \text{ wobei } SK \in \mathcal{SK}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{Pat}_i \ ::= (c_i\ V_1 \ldots V_{ar(c_i)}) \text{ wobei die Variablen } V_i \text{ alle verschieden sind.}
$$

KFPTS:Syntax (2)

Zu jedem Superkombinator SK
gibt es eine Superkombinatordefinition:

$$SK\ V_1\ \ldots\ V_n = \mathbf{Expr}$$

- V_i paarweise verschiedene Variablen;
- $\mathbf{Expr}$ ein KFPTS-Ausdruck;
- $FV(\mathbf{Expr}) \subseteq \{V_1, \ldots, V_n\}$;
- $\mathrm{ar}(SK) = n \geq 0$: Stelligkeit des Superkombinators

Beispiel: Superkombinator `length`

$$\begin{array}{l} \texttt{length}\ xs = \texttt{case}_{\texttt{List}}\ xs\ \texttt{of}\ \{ \\ \qquad\qquad \texttt{Nil} \to 0; \\ \qquad\qquad (\texttt{Cons}\ y\ ys) \to (1 + \texttt{length}\ ys)\} \end{array}$$

KFPTS: Syntax (3)

Ein KFPTS-Programm besteht aus:

- einer Menge von Typen und Konstruktoren,
- einer Menge von Superkombinator-Definitionen,
- und aus einem KFPTS-Ausdruck s.
  (Diesen könnte man auch als Superkombinator `main` mit Definition $\texttt{main} = s$ definieren.)

Das Programm darf keine freien Variablennamen enthalten:
D.h. alle in s verwendeten Superkombinatoren müssen definiert sein.

KFPTS:Syntax (2) Superkombinatoren

Unterschiede Haskell / KFPTS bei Superkombinatordefinitionen:

In Haskell möglich; aber nicht in KFPTS:

- Mehrere Definitionen (für verschiedene Fälle) pro Superkombinator.
- Argumente können Pattern sein
- Guards sind möglich

KFPTS:Syntax (2) Superkombinatoren

Unterschiede Haskell / KFPTS bei Superkombinatordefinitionen:

In Haskell möglich; aber nicht in KFPTS:

- Mehrere Definitionen (für verschiedene Fälle) pro Superkombinator.
- Argumente können Pattern sein
- Guards sind möglich

Diese Erweiterungen sind übersetzbar nach KFPTS.

Superkombinatoren

Der Begriff Superkombinator im Lambda Kalkül:

- geschlossener Ausdruck s
- Form $\lambda x_1, \ldots x_n.s'$
- s' ist Ausdruck aus: Superkombinatoren und $x_1, \ldots, x_n$

Beispiele

$\lambda x, y.x$
$\lambda x.(x\ ((\lambda y.y)\ x))$

$\lambda x.(x\ \lambda y.(y\ x))$

Superkombinatoren

Der Begriff Superkombinator im Lambda Kalkül:

- geschlossener Ausdruck s
- Form $\lambda x_1, \ldots x_n.s'$
- s' ist Ausdruck aus: Superkombinatoren und $x_1, \ldots, x_n$

Beispiele

$\lambda x, y.x$

$\lambda x.(x\ ((\lambda y.y)\ x))$ $\quad = \lambda x.(x\ (I\ x))$ mit $I = \lambda y.y$

$\lambda x.(x\ \lambda y.(y\ x))$

Superkombinatoren

Der Begriff Superkombinator im Lambda Kalkül:

- geschlossener Ausdruck s
- Form $\lambda x_1, \ldots x_n.s'$
- s' ist Ausdruck aus: Superkombinatoren und $x_1, \ldots, x_n$

Beispiele

$\lambda x, y.x$

$\lambda x.(x\ ((\lambda y.y)\ x))$ $\quad = \lambda x.(x\ (I\ x))$ mit $I = \lambda y.y$

$\lambda x.(x\ \lambda y.(y\ x))$ kein Superkombinator, aber

transformierbar zu:

$\lambda x.(x\ ((\lambda z.\lambda y.(y\ z))\ x))$

Superkombinatoren

Der Begriff Superkombinator im Lambda Kalkül:

- geschlossener Ausdruck s
- Form $\lambda x_1, \dots x_n.s'$
- s' ist Ausdruck aus: Superkombinatoren und $x_1, \dots, x_n$

Beispiele

$\lambda x, y.x$

$\lambda x.(x\ ((\lambda y.y)\ x))$ $\quad = \lambda x.(x\ (I\ x))$ mit $I = \lambda y.y$

$\lambda x.(x\ \lambda y.(y\ x))$ kein Superkombinator, aber

transformierbar zu:

$\lambda x.(x\ ((\lambda z.\lambda y.(y\ z))\ x))$ $\quad = \lambda x.(x\ (M\ x))$, $M = (\lambda z.\lambda y.(y\ z))$

Superkombinatoren, Einschub eta-Transformation

Die eta (η)- Transformation im Lambda-Kalkül ist:

$$s \sim_\eta \lambda x.s\ x \quad \text{wenn } x \text{ nicht frei in } s$$

Diese ist in manchen Programmiersprachen korrekt

Vorsicht: Aber i.a. ist diese Transformation falsch in Haskell:
Die η Transformation kann mal richtig mal falsch sein

- $\bot$ ist keine WHNF, aber $\lambda x.\bot\ x$ ist eine WHNF.
- Fazit: η kann die Terminierung von Ausdrücken ändern!!
- !! η wird im Haskell-Compiler nur dann verwendet, wenn die spezifische Transformation korrekt ist.

KFPTS: Operationale Semantik

Reduktionskontexte:

$$\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R}\ \mathbf{Expr}) \mid \texttt{case}_{Typ}\ \mathbf{R}\ \texttt{of}\ Alts$$

KFPTS: Operationale Semantik

Reduktionskontexte:

$$\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R}\ \mathbf{Expr}) \mid \texttt{case}_{Typ}\ \mathbf{R}\ \texttt{of}\ Alts$$

Reduktionsregeln (β), (case) und (SK-β):

(β) $\quad (\lambda x.s)\ t \to s[t/x]$

(case) $\quad \texttt{case}_{Typ}\ (c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})\ \texttt{of}\ \{\ldots;\ (c\ x_1 \ldots\ x_{\mathrm{ar}(c)}) \to t;\ \ \ldots\}$
$\quad \to t[s_1/x_1, \ldots, s_{\mathrm{ar}(c)}/x_{\mathrm{ar}(c)}]$

(SK-β) $\quad (SK\ s_1\ \ldots\ s_n) \to e[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n]$,
wenn $SK\ x_1\ \ldots\ x_n = e$ die Definition von SK ist

KFPTS: Operationale Semantik

Reduktionskontexte:

$$\mathbf{R} ::= [\cdot] \mid (\mathbf{R}\ \mathbf{Expr}) \mid \texttt{case}_{Typ}\ \mathbf{R}\ \texttt{of}\ Alts$$

Reduktionsregeln (β), (case) und (SK-β):

(β) $\quad (\lambda x.s)\ t \to s[t/x]$

(case) $\quad \texttt{case}_{Typ}\ (c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})\ \texttt{of}\ \{\ldots;\ (c\ x_1 \ldots\ x_{\mathrm{ar}(c)}) \to t;\ \ldots\}$
$\quad \to t[s_1/x_1, \ldots, s_{\mathrm{ar}(c)}/x_{\mathrm{ar}(c)}]$

(SK-β) $\quad (SK\ s_1\ \ldots\ s_n) \to e[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n]$,
wenn $SK\ x_1\ \ldots\ x_n = e$ die Definition von SK ist

Normalordnungsreduktion:

$$\frac{s \to t \qquad \text{mit } (\beta)\text{-, (case)- oder (SK-}\beta)}{R[s] \xrightarrow{no} R[t]}$$

KFPTS: WHNFs und Dynamische Typisierung

WHNFs

- WHNF = CWHNF oder FWHNF
- CWHNF = Konstruktoranwendung $(c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})$
- FWHNF = Abstraktion oder $SK\ s_1\ \ldots\ s_m$ mit $\mathrm{ar}(SK) > m$

Direkt dynamisch ungetypt:

- Regeln wie vorher: $R[(\texttt{case}_T\ \lambda x.s\ \texttt{of}\ldots)]$, $R[(\texttt{case}_T\ (c\ s_1 \ldots s_n)\texttt{of}\ldots)]$, wenn $(c..)$ nicht von Typ T und $R[((c\ s_1\ \ldots\ s_{\mathrm{ar}(c)})\ t)]$
- **Neue Regel**: $R[\texttt{case}_T\ (SK\ s_1\ \ldots\ s_m)\ \texttt{of}\ Alts]$ ist direkt dynamisch ungetypt falls $\mathrm{ar}(SK) > m$.

Markierungsalgorithmus

Markierung funktioniert genauso wie in KFPTS:

- $(s\ t)^\star \Rightarrow (s^\star\ t)$
- $(\texttt{case}_{Typ}\ s\ \texttt{of}\ Alts)^\star \Rightarrow (\texttt{case}_{Typ}\ s^\star\ \texttt{of}\ Alts)$

Neue Fälle:

- Ein Superkombinator ist mit $\star$ markiert:
  - Genügend Argumente vorhanden: Reduziere mit (SK-β)
  - Zu wenig Argumente und kein Kontext außen: WHNF
  - Zu wenig Argumente und im Kontext $(\texttt{case}\ [.]\ \ldots)$: direkt dynamisch ungetypt.

Beispiel

Die Superkombinatoren map und not:

$$
\begin{aligned}
map\ f\ xs &= \mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ xs\ \mathtt{of}\ \{\mathtt{Nil} \to \mathtt{Nil};\\
&\qquad\qquad\qquad (\mathtt{Cons}\ y\ ys) \to \mathtt{Cons}\ (f\ y)\ (map\ f\ ys)\}\\
not\ x &= \mathtt{case}_{\mathtt{Bool}}\ x\ \mathtt{of}\ \{\mathtt{True} \to \mathtt{False}; \mathtt{False} \to \mathtt{True}\}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Die Superkombinatoren map und not:

$$
\begin{array}{lll}
map\ f\ xs & = & \mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ xs\ \mathtt{of}\ \{\mathtt{Nil} \to \mathtt{Nil}; \\
 & & \qquad (\mathtt{Cons}\ y\ ys) \to \mathtt{Cons}\ (f\ y)\ (map\ f\ ys)\} \\
not\ x & = & \mathtt{case}_{\mathtt{Bool}}\ x\ \mathtt{of}\ \{\mathtt{True} \to \mathtt{False}; \mathtt{False} \to \mathtt{True}\}
\end{array}
$$

Beispiel zur Auswertung:

$$
\begin{array}{ll}
 & map\ not\ (\mathtt{Cons}\ \mathtt{True}\ (\mathtt{Cons}\ \mathtt{False}\ \mathtt{Nil})) \\
\xrightarrow{no,\text{SK-}\beta} & \mathtt{case}_{\mathtt{List}}\ (\mathtt{Cons}\ \mathtt{True}\ (\mathtt{Cons}\ \mathtt{False}\ \mathtt{Nil}))\ \mathtt{of}\ \{ \\
 & \qquad \mathtt{Nil} \to \mathtt{Nil}; \\
 & \qquad (\mathtt{Cons}\ y\ ys) \to \mathtt{Cons}\ (not\ y)\ (map\ not\ ys)\} \\
\xrightarrow{no,\text{case}} & \mathtt{Cons}\ (not\ \mathtt{True})\ (map\ not\ (\mathtt{Cons}\ \mathtt{False}\ \mathtt{Nil}))
\end{array}
$$

WHNF erreicht!

Beachte: Im GHCI-Interpreter wird nur aufgrund des Anzeigens am Bildschirm bzw im Prompt in den Argumenten eines Konstruktors weiter ausgewertet

Erweiterung um seq und strict

- In Haskell gibt es seq:

$$(\texttt{seq}\ a\ b) = \begin{cases} b & \text{falls } a\Downarrow \\ \bot & \text{falls } a\Uparrow \end{cases}$$

- Operational: Werte erst a aus, dann b; und gebe (nur) den Wert von b zurück
- Analog: strict (in Haskell infix als $! geschrieben)
- strict f macht f strikt im ersten Argument, d.h. strict f wertet erst das Argument aus, dann erfolgt die Definitionseinsetzung.
- seq und strict sind austauschbar:

```
f $! x    =   seq x (f x)
seq a b   =   (\x -> b) $! a
```

Erweiterung um seq und strict

- In Haskell gibt es seq:

$$(\texttt{seq}\ a\ b) = \begin{cases} b & \text{falls } a\Downarrow \\ \bot & \text{falls } a\Uparrow \end{cases}$$

- Operational: Werte erst a aus, dann b; und gebe (nur) den Wert von b zurück
- Analog: `strict` (in Haskell infix als `$!` geschrieben)
- `strict f` macht `f` strikt im ersten Argument, d.h. `strict f` wertet erst das Argument aus, dann erfolgt die Definitionseinsetzung.
- `seq` und `strict` sind austauschbar:

```
f $! x    =   seq x (f x)
seq a b   =   (\x -> b) $! a
```

KFPXX+seq Sprachen

Nachweisbar: seq ist in KFPT, KFPTS nicht kodierbar!

Wir bezeichnen mit

- KFPT+seq die Erweiterung von KFPT um seq
- KFPTS+seq die Erweiterung von KFPTS um seq

Wir verzichten auf die formale Definition!
Man benötigt u.a. die Reduktionsregel:

$$\texttt{seq}\ v\ t \quad \rightarrow \quad t, \ \text{wenn}\ v\ \text{WHNF}$$

erweiterte Reduktionskontexte und die neue Verschieberegel:

$$(\texttt{seq}\ s\ t)^\star \quad \rightarrow \quad (\texttt{seq}\ s^\star\ t)$$

Bemerkung: Die (low-level) Sprache KFP

KFP hat keine Typbeschränkungen! und es gibt keine Laufzeitfehler

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{Expr} & ::= & V \mid \lambda V.\mathbf{Expr} \mid (\mathbf{Expr}_1\ \mathbf{Expr}_2) \\
& \mid & (c_i\ \mathbf{Expr}_1\ \ldots\ \mathbf{Expr}_{\mathrm{ar}(c_i)}) \\
& \mid & (\texttt{case}\ \mathbf{Expr}\ \texttt{of} \\
& & \quad \{\mathbf{Pat}_1 \to \mathbf{Expr}_1; \ldots; \mathbf{Pat}_n \to \mathbf{Expr}_n; \texttt{lambda} \to \mathbf{Expr}_{n+1}\}) \\
& & \text{wobei } Pat_1, \ldots, Pat_n \text{ alle Konstruktoren abdecken}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{Pat}_i \ ::= \ (c_i\ V_1 \ldots V_{ar(c_i)}) \text{ wobei die Variablen } V_i \text{ alle verschieden sind.}
$$

- Unterschied zu KFPT: Kein getyptes `case`, `lambda`-Pattern
- Neue Reduktionsregel `case` $\lambda x.s$ `of` $\{\ldots, \texttt{lambda} \to t\} \to t$
- In KFP ist `seq` kodierbar:

$$
\texttt{seq}\ a\ b := \texttt{case}\ a\ \texttt{of}\ \{Pat_1 \to b; \ldots; Pat_n \to b; \texttt{lambda} \to b\}
$$

Typisierung

Polymorphe Typen

KFPTSP

Mit KFPTSP bezeichnen wir polymorph getyptes KFPTS

Definition

Die Syntax von polymorphen Typen kann durch die folgende Grammatik beschrieben werden:

$$\mathbf{T} ::= TV \mid TC\ \mathbf{T}_1\ \ldots\ \mathbf{T}_n \mid \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$$

wobei TV für eine Typvariable steht und TC ein Typkonstruktor mit Stelligkeit n ist.

Nur die Ausdrücke, die einen (polymorphen) Typ besitzen, gehören zu KFPTSP.

KFPTSP Beispiele

- polymorph: Typen haben Typvariablen
- z.B. `map` $:: (\mathtt{a} \to \mathtt{b}) \to (\mathtt{List\ a}) \to (\mathtt{List\ b})$
- `const x y = x` mit $\quad$ `const` $:: \mathtt{a} \to (\mathtt{b} \to \mathtt{a})$

- Haskell: `->` statt $\to$
- Haskell verwendet `[a]` statt `(List a)`.

Beispiele

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{True} & :: & \texttt{Bool} \\
\texttt{False} & :: & \texttt{Bool} \\
\texttt{not} & :: & \texttt{Bool} \to \texttt{Bool} \\
\texttt{map} & :: & (\texttt{a} \to \texttt{b}) \to [\texttt{a}] \to [\texttt{b}] \\
(\lambda x.x) & :: & (\texttt{a} \to \texttt{a})
\end{array}
$$

Beispiele

- $(\lambda x.x\ x)$ und auch Ω haben keinen polymorphen Typ, sind also nicht in KFPTSP.
- der Fixpunktoperator `fix` hat auch keinen polymorphen Typ, ist also nicht in KFPTSP.
- Aber, Rekursion gibt es, da man rekursive Superkombinatoren definieren kann.
- Also hat KFPTSP volle Berechnungskraft.

Einige Typregeln

- Für die Anwendung:

$$\frac{s :: T_1 \to T_2, t :: T_1}{(s\ t) :: T_2}$$

- Instanziierung

$$\frac{s :: T}{s :: T'}$$ wenn $T' = \sigma(T)$, wobei σ eine Typsubstitution ist, die Typen für Typvariablen ersetzt.

- Für case-Ausdrücke:

$$\frac{s :: T_1, \quad \forall i : Pat_i :: T_1, \quad \forall i : t_i :: T_2}{(\texttt{case}_T\ s\ \texttt{of}\ \{Pat_1 \to t_1; \ldots; Pat_n \to t_n\}) :: T_2}$$

Beispiel

$$\begin{array}{lll}
\texttt{and} & := & \lambda x, y.\texttt{case}_{\texttt{Bool}}\ x\ \texttt{of}\ \{\texttt{True} \to y; \texttt{False} \to \texttt{False}\} \\
\texttt{or} & := & \lambda x.y.\texttt{case}_{\texttt{Bool}}\ x\ \texttt{of}\ \{\texttt{True} \to \texttt{True}; \texttt{False} \to y\}
\end{array}$$

Beide haben Typ: $\texttt{Bool} \to \texttt{Bool} \to \texttt{Bool}$

Mit der Anwendungsregel kann man Typen von Ausdrücken berechnen:

$$\frac{\dfrac{\texttt{and} :: \texttt{Bool} \to \texttt{Bool} \to \texttt{Bool}, \texttt{True} :: \texttt{Bool}}{(\texttt{and True}) :: \texttt{Bool} \to \texttt{Bool}}, \texttt{False} :: \texttt{Bool}}{(\texttt{and True False}) :: \texttt{Bool}}$$

Beispiel

$$\dfrac{\begin{array}{l}\texttt{True} :: \texttt{Bool},\\ \texttt{False} :: \texttt{Bool}\end{array},\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\texttt{Cons} :: a \to [a] \to [a]}{\texttt{Cons} :: \texttt{Bool} \to [\texttt{Bool}] \to [\texttt{Bool}]},\ \texttt{True} :: \texttt{Bool}}{(\texttt{Cons True}) :: [\texttt{Bool}] \to [\texttt{Bool}]},\ \dfrac{\texttt{Nil} :: [a]}{\texttt{Nil} :: [\texttt{Bool}]}}{(\texttt{Cons True Nil}) :: [\texttt{Bool}]},\quad \dfrac{\texttt{Nil} :: [a]}{\texttt{Nil} :: [\texttt{Bool}]}}{\texttt{case}_{\texttt{Bool}}\ \texttt{True of}\ \{\texttt{True} \to (\texttt{Cons True Nil}); \texttt{False} \to \texttt{Nil}\} :: [\texttt{Bool}]}$$

Beispiel

$$\cfrac{\cfrac{\texttt{map} :: (a \to b) \to [a] \to [b]}{\texttt{map} :: (\texttt{Bool} \to \texttt{Bool}) \to [\texttt{Bool}] \to [\texttt{Bool}]}, \texttt{not} :: \texttt{Bool} \to \texttt{Bool}}{(\texttt{map not}) :: [\texttt{Bool}] \to [\texttt{Bool}]}$$

Übersicht

Kernsprache	Besonderheiten
KFP	Erweiterung des call-by-name Lambda-Kalküls um ungetyptes case und Datenkonstruktoren, spezielles case-Pattern `lambda` ermöglicht Kodierung von seq.
KFPT	Erweiterung des call-by-name Lambda-Kalküls um (schwach) getyptes case und Datenkonstruktoren, seq ist nicht kodierbar.
KFPTS	Erweiterung von KFPT um rekursive Superkombinatoren, seq nicht kodierbar.
KFPTSP	KFPTS, polymorph getypt; seq nicht kodierbar.
KFPT+seq	Erweiterung von KFPT um den seq-Operator
KFPTS+seq	Erweiterung von KFPTS um den seq-Operator
KFPTSP+seq	KFPTS+seq mit polymorpher Typisierung, sehr geeignete Kernsprache für Haskell

Ausblick

- Erörterung der meisten Konstrukte von Haskell
- insbesondere auch: Modulsystem, Typklassen
- Informell: KFPTSP+seq ist die passende Kernsprache
- Genauere Erkärungen und Analysen zu Typisierung und zur Typberechnung kommen noch!
- Exkurs demnächst: Probabilistische funktionale Programmierung