

Einführung in die funktionale Programmierung

Wintersemester 2021/2022

Aufgabenblatt Nr. 3

Abgabe: Montag 29. November 2021 10:00

Bitte schicken Sie auch die Haskell-Quelltexte

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Die folgenden KFPT-Ausdrücke seien gegeben:

- a) $(\lambda y.((\lambda x.x) \text{ True}))$
- b) $((\lambda y.\text{case}_{\text{List}} y \text{ of } \{(\text{Cons } a \ b) \rightarrow b; \text{ Nil} \rightarrow \text{Nil}\}) \text{ True})$
- c) $((\lambda z.\text{case}_{\text{Bool}} z \text{ of } \{\text{True} \rightarrow \text{True}; \text{ False} \rightarrow (\text{True Nil})\}) \text{ True})$
- d) $(\text{case}_{\text{Paar}} (\text{Paar True } (\lambda z.(z \ z))) \text{ of } \{(\text{Paar } a \ b) \rightarrow (b \ b)\})$
- e) $(\text{case}_{\text{Bool}} (\lambda x.\text{True}) \text{ of } \{\text{True} \rightarrow \text{False}; \text{ False} \rightarrow \text{True}\})$
- f) $(\text{Cons } (\text{True True}) (\text{Cons True } (\text{Cons True Nil})))$

Geben Sie für jeden der obigen Ausdrücke an, welche der folgenden Aussagen auf ihn zutreffen.

- 1. Der Ausdruck *ist eine WHNF*.
- 2. Der Ausdruck *ist eine FWHNF*.
- 3. Der Ausdruck *ist eine CWHNF*.
- 4. Der Ausdruck *hat eine WHNF*.
- 5. Der Ausdruck *hat eine FWHNF*.
- 6. Der Ausdruck *hat eine CWHNF*.
- 7. Der Ausdruck *ist dynamisch ungetypt*.
- 8. Der Ausdruck *ist direkt dynamisch ungetypt*.
- 9. Der Ausdruck *terminiert*.
- 10. Der Ausdruck *divergiert*.

Für die Lösung der Aufgabe reicht eine Tabelle von folgender Form aus:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a)										
b)										
c)										
d)										
e)										
f)										

Dabei sollte angekreuzt sein, welche Ausdrücke die entsprechende Eigenschaft erfüllen.

Aufgabe 2 (35 Punkte)

Der folgenden Datentyp `Expr` stellt KFPT-Ausdrücke dar, die die Typen `List` und `Bool` verwenden. Er ist polymorph über dem Typ für die Variablen definiert:

```
data Expr a =
  Var a                    -- x      = Var "x"
| App (Expr a) (Expr a)   -- (e1 e2) = App e1 e2
| Lam a (Expr a)          -- \x.e  = Lam "x" e
| ListCons (Expr a) (Expr a) -- a:as  = ListCons a as
| ListNil                 -- []      = ListNil
| BoolTrue                -- True   = BoolTrue
| BoolFalse               -- False  = BoolFalse
| CaseList (Expr a) (Expr a) (a,a,Expr a) -- case_List e of {[] -> e1; (x:xs) -> e2}
                                         -- = CaseList e (e1) ("x",xs",e2)
| CaseBool (Expr a) (Expr a) (Expr a)    -- case_Bool e of {True -> e1; False -> e2}
                                         -- = CaseBool e e1 e2

deriving(Eq,Show)
```

Auf der Webseite zur Vorlesung finden Sie den Haskell-Quellcode für den Datentyp, einige Beispiele und eine Funktion `substitute`, welche die Substitution durchführt (`substitute e1 e2 x` berechnet gerade `e1[e2/x]`).

Implementieren Sie in Haskell und zeigen Sie dass alle Funktionen mindestens einen Ausdruck sinnvoll verarbeiten.

- a) drei Funktionen `isFWHNF`, `isCWHNF` und `isWHNF`, die einen KFPT-Ausdruck erwarten und prüfen, ob dieser eine FWHNF, eine CWHNF bzw. eine WHNF ist. (Jede der Funktionen hat den Typ `Expr a -> Bool`). (5 Punkte)

Als Beispiel ergibt sich für `isWHNF`:

```
isWHNF e = case e of Lam x y -> True
              ListCons _ _ -> True
              ListNil   -> True
              BoolTrue  -> True
              BoolFalse -> True
```

mit einem Testaufruf:

```
*Main> isWHNF (ListCons BoolFalse ListNil)
True
```

- b) die Funktion `betaReduce :: Expr String -> Expr String`, die einen KFPT-Ausdruck erwartet und diesen – falls möglich – *unmittelbar* β -reduziert. Ist dies nicht möglich, so soll die Eingabe unverändert zurück gegeben werden. (5 Punkte)
- c) die Funktion `caseReduce :: Expr String -> Expr String`, die einen KFPT-Ausdruck erwartet und diesen – falls möglich – *unmittelbar* case-reduziert. Ist dies nicht möglich, so soll die Eingabe unverändert zurück gegeben werden. (5 Punkte)

- d) die Funktion `isUntyped :: Expr String -> Bool`, die einen KFPT-Ausdruck erhält und prüft, ob dieser *direkt dynamisch ungetypt* ist. (7 Punkte)
- e) die Funktion `oneStepNormalOrder :: Expr String -> Expr String`, die einen KFPT-Ausdruck erhält und einen Normalordnungsreduktionsschritt für den Ausdruck ausführt. Ist kein solcher Schritt möglich, so soll die Eingabe unverändert zurück gegeben werden. (8 Punkte)
- f) die Funktion `calcResult :: KFPTAusdruck -> Result`, die einen KFPT-Ausdruck erhält und diesen solange in Normalordnung auswertet, bis feststeht, ob der Ausdruck eine WHNF hat (in diesem Fall soll `TerminatesWith e` zurückgeliefert werden, wobei *e* die erhaltene WHNF ist) oder divergiert (in diesem Fall soll `Diverges` zurückgeliefert werden). Dabei sei `Result` der folgende Datentyp:

```
data Result = TerminatesWith (Expr String) | Diverges
  deriving(Eq,Show)
```

Die Funktion `calcResult` darf für getypte divergierende Ausdrücke nicht terminieren. (5 Punkte)

Aufgabe 3 (15 Bonusunkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Normalordnungsreduktion für folgenden Ausdruck nicht terminiert:

$((\lambda x.(x\ x\ x))\ (\lambda x.(x\ x\ x)))$.