

# Logikbasierte Systeme der Wissensverarbeitung

## Modallogik

Prof. Dr. M. Schmidt-Schauß

SoSe 2025

Zur Formulierung und Repräsentation von Aussagen,  
die über die Aussagenlogik hinausgehen.  
Meist „modale“ Einschränkung.

„**Bald** wird es regnen“

„**Möglicherweise** ist die Erde eine Kugel“ .

„Ich **weiß**, dass es niemand gibt, der alles **weiß**“ .

„Es ist **verboten**, bei roter Ampel über die Kreuzung zu fahren“

( Es gibt auch modallogische Erweiterungen der Prädikatenlogik. )

## Einfachste Variante:

Aussagenlogik und extra Operatoren  $\Box$ ,  $\Diamond$  (Box, Diamond) auf Formeln:

| $\Box$                                                                      | $\Diamond$                                                              |                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| „ $\forall$ “<br>Immer gilt:<br>Es ist notwendigerweise:<br>Es ist geboten: | „ $\exists$ “<br>Irgendwann gilt:<br>Es ist möglich:<br>Es ist erlaubt: | (temporal)<br>(modal)<br>(deontic) |

## Erweiterungen

- Simultan mehrere (auch parametrisierte) Operatoren  
 $\Box_A, \Box_B, \Diamond_C$ : A glaubt ..., B glaubt ..., C hält für möglich ...
- Prädikatenlogik mit Modaloperatoren

## *philosophische Logik*

untersucht u.a. Modallogik und Varianten

Fragestellung der philosophischen Logik:

Welche Repräsentation?

Welche Ableitungsverfahren?

Sind diese “richtig”?

Für welche Zwecke/Fragestellungen?

Z.B. „wenn es nicht regnet, dann Radfahren möglich.“

„Wenn Aussage T beweisbar ist, dann ist sie auch gültig.“

(„nichtmonotone“ Logik gibt es auch, betrachten wir hier nicht)

## Diskrete Zeit

Operatoren: „vorher“, „nachher“, „immer“, „manchmal“ usw.

$\Box F$  :  $F$  gilt immer in der Zukunft

$\Diamond F$  :  $F$  gilt irgendwann in der Zukunft.

In dieser Modellierung sollte gelten:

$$\Box\Box F \iff \Box F$$

lineare Zeit: deterministische Prozesse

Dann gilt:  $(\Diamond\Box F) \implies (\Box\Diamond F)$

verzweigende Zeit: nicht-deterministische Prozesse:

gilt nicht mehr:  $(\Diamond\Box F) \implies (\Box\Diamond F)$

Logik CTL\* (computation tree logic):

ist Verallgemeinerung einer Modallogik zu verzweigender Zeit  
mit Anwendung in Hardwareverifikation.

Spezialisierung: LTL: linear time logic.

| Modallogik                    | CTL                   |
|-------------------------------|-----------------------|
| Welten                        | Welten (Zustände)     |
| Erreichbarkeit (nächste Welt) | Erreichbarkeits-Pfade |
|                               | Es gibt keine Endwelt |

# Logik des Erlaubten und Verbotenen (Normative Logik, Deontic Logic)

Aus Wikipedia: „Deontische Logik ist der Bereich der Logik, der die logischen Verhältnisse von Begriffen, die sich auf das Sollen beziehen, untersucht. Begriffe, die sich auf das Sollen beziehen, sind Gebot, Verbot, Erlaubnis und andere mehr.“

- $\Box F$  :  $F$  ist geboten;  $F$  muss gelten; bzw.  $F$  ist obligatorisch.
- $\Diamond F$  :  $F$  ist erlaubt.

In dieser Logik sollte gelten, dass obligatorisches auch erlaubt sein sollte. D.h. das Axiom gilt::

$$\Box F \implies \Diamond F$$

$\Box F$  :  $F$  ist bekannt.

$\Diamond F$  :  $F$  ist glaubhaft.

bekannte Fakten sind richtig: D.h.

$$\Box F \implies F$$

ist ein extra Axiom dieser Logikvariante

Dieses Axiom ist falsch in einer Zeitlogik mit

$\Box =$  im nächsten Zustand



**Beispiel:** Mathematische Aussagen bzw. Sätze zu den natürlichen Zahlen.

$\Box F$  :  $F$  ist beweisbar

$\Diamond F$  :  $F$  ist gültig.

Bewiesene Fakten sind richtig: D.h.  $\Box F \implies \Diamond F$   
ist ein extra Axiom dieser Logikvariante

Die umgekehrte Aussage ist falsch:

$$\Diamond F \implies \Box F$$

da nicht alle gültigen Sätze zu  $\mathbb{N}$  bewiesen werden können.

# Variante einer Logik des Wissens (autoepistemische Logik)

Glauben an gewisse Fakten.

$\Box F$  :  $F$  wird geglaubt.

$\Diamond F$  :  $F$  ist möglich ( $\neg F$  wird nicht geglaubt).

Die Axiome dazu:

|                      |            |                            |                        |
|----------------------|------------|----------------------------|------------------------|
| $\Box(F \implies G)$ | $\implies$ | $(\Box F \implies \Box G)$ | (Axiom $K$ )           |
| $\Box F$             | $\implies$ | $\Box \Box F$              | positive Introspektion |
| $\neg \Box F$        | $\implies$ | $\Box(\neg \Box F)$        | negative Introspektion |

parametrisierte Modaloperatoren in einer Logik des Wissens mit mehreren Akteuren:

Akteure und Formeln sind getrennt.

$\boxed{A} F$        $A$  weiß, dass  $F$  gilt

$\boxed{A} (\neg \boxed{B} F)$        $A$  weiß, dass  $B$  nicht weiß, dass  $F$  wahr ist.

Zusätze:

- Formeln die immer gelten (unabhängig von Akteuren)
- extra Axiome

Eine Kripke-Semantik dazu ist möglich; mit Erweiterung um Akteure.

**Extremfall:** *dynamische Logik* zur Programmverifikation.

Es gibt zwei syntaktische Klassen:

- Programme (auch nichtterminierende, und nicht-deterministische)
- Formeln      Eigenschaft des “Speicherinhalts”

$\boxed{P}F$ :      nach (jeder) Ausführung des Programms  $P$  gilt, falls das Programm terminiert, die Formel  $F$ .

$\wedge, \vee, \neg, \implies$       Logische Operatoren. . .

Es gibt sehr gut ausgearbeitete (theoretische) Arbeiten in diesem Bereich

Syntax

Semantik

Tautologien

Folgerungen

Syntax: wie Aussagenlogik  
Und zwei einstellige Modal-Operatoren  $\Box$  und  $\Diamond$ ;

Zur Grammatik kommt hinzu:

$$F ::= \Box F \mid \Diamond F \quad (\text{auch geschachtelt})$$

Beispiel  $\Box((\Diamond X) \vee Y)$

**Achtung:**  $\Box$  und  $\Diamond$  sind nicht wahrheitsfunktional in der Modalen Aussagenlogik.

D.h. es gibt keine Wahrheitstafel für  $\Box$  und  $\Diamond$ .

(Bedeutung s.u. )

(benannt nach Saul Aaron Kripke, (US-Logiker und Philosoph))

Kripke Axiom  $K$ :  $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$ .

- Das Kripke Axiom ist nicht direkt intuitiv.
- Aber es ist vernünftig, da dann eine leicht verständliche Semantik funktioniert.
- Wenn man den Begriff der möglichen Welten akzeptiert und nutzt, dann ist es leicht zu verstehen.
- Verwirft man das Kripke-Axiom (Nicht-Kripke-Modal-Logiken), dann ist man auf syntaktische Herleitungsmethoden angewiesen.

Es gilt: Wenn das (Kripke-) Axiom  $K$  gilt,  
bzw. wenn man es annimmt, dann  
kann man die Herleitbarkeit  
auch mittels Modellen charakterisieren

**Modallogische Semantik:** Basis ist eine strukturierte Menge von aussagenlogischen Interpretationen.

mögliche Welten (Interpretationen)  
Erreichbarkeitsrelation

Menge  $W$   
 $R$ : binäre Relation auf  $W$

Kripke-Rahmen (Kripke-Frame)

Paar  $(W, R)$

**Kripke-Struktur**

Tripel  $(W, R, I)$

aussagenlogische Interpretation(en):

$I(w)$   
für jede Welt  $w \in W$



Modallogik vor Kripke, D.h. vor ca 1960:

- Modallogik wurde formal untersucht:  
Regeln zu Herleitungen und Konsequenzen.
- Wesentlich sind: die Menge der Tautologien,  
und der Zusammenhang mit den verschiedenen  
Herleitungsregeln.

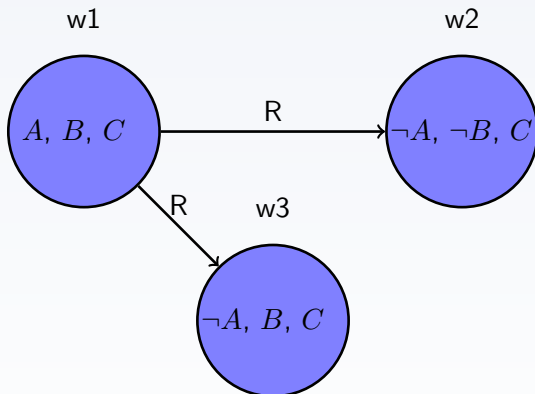
Die Kripke-Semantik erlaubt es, fast alle diese  
Modallogik-Varianten zu verstehen und zu ordnen.

Modallogik vor Kripke, D.h. vor ca 1960:

- Modallogik wurde formal untersucht:  
Regeln zu Herleitungen und Konsequenzen.
- Wesentlich sind: die Menge der Tautologien,  
und der Zusammenhang mit den verschiedenen  
Herleitungsregeln.

Die Kripke-Semantik erlaubt es, fast alle diese  
Modallogik-Varianten zu verstehen und zu ordnen.

**Vorsicht:** Es gibt (exotische) Modallogiken, in den das  
Kripke-Axiom  $K$  nicht gilt,  
d.h. es gibt keine Kripke Semantik dazu.  
(werden in der Vorlesung nicht behandelt)



$A, B, C, \dots$  aussagenlogische Variablen;  
blaue Kreise: Interpretationen  
 $R$  (direkte) Erreichbarkeitsrelation

$(W, R, I)$ : (Welten, direkte Erreichbarkeits-Relation, Interpretation)

Bei gegebener, fester Kripke-Struktur  $(W, R, I)$ :

definiert man  $\models$  bzgl dieser Kripke-Struktur. (eigentlich  $\models_K$ )

Sei  $w \in W$

$$w \models 1$$

$$w \not\models 0$$

$$w \models A$$

gdw.  $I(w)(A)$  für die Variable  $A$

$$w \models F \vee G$$

gdw.  $w \models F$  oder  $w \models G$

$$w \models F \wedge G$$

gdw.  $w \models F$  und  $w \models G$

$$w \models F \implies G$$

gdw. nicht  $(w \models F)$  oder  $w \models G$

$$w \models \neg F$$

gdw. nicht  $w \models F$

$$w \models \Box F$$

gdw.  $\forall w' : w R w' \implies w' \models F$

$$w \models \Diamond F$$

gdw.  $\exists w' : w R w' \wedge w' \models F$

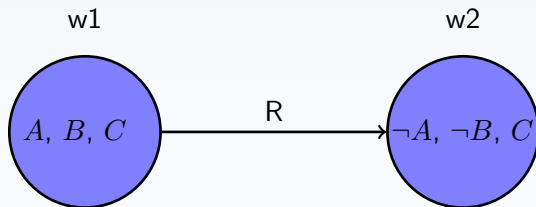
$F$  **gültig in**  $K = (W, R, I)$ , falls für alle  $w \in W$ :  $w \models F$ .

Notation:  $K \models F$ .

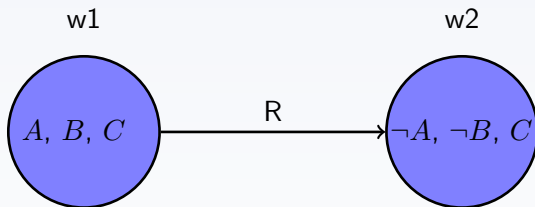
$F$  **Tautologie**, falls für alle  $K = (W, R, I)$ :  $K \models F$ .

$F$  **erfüllbar**, falls es ein  $K = (W, R, I)$  gibt mit:  $K \models F$ .

$F$  **gültig im Kripke-Rahmen**  $(W, R)$ , falls für alle  $I$  gilt:  $(W, R, I) \models F$ .

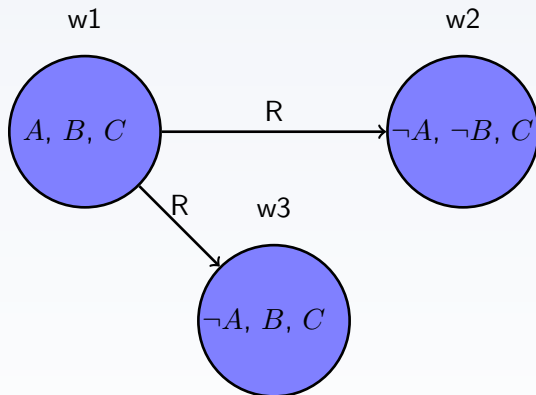


| Formel       | w1 | w2 |
|--------------|----|----|
| $A$          | 1  | 0  |
| $\Box A$     | 0  | 1  |
| $\Diamond A$ | 0  | 0  |
| $\Diamond C$ | 1  | 0  |



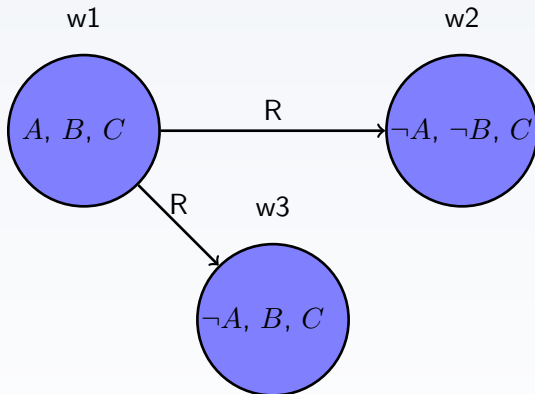
| Formel       | w1 | w2 |
|--------------|----|----|
| $A$          | 1  | 0  |
| $\Box A$     | 0  | 1  |
| $\Diamond A$ | 0  | 0  |
| $\Diamond C$ | 1  | 0  |

| Formel                 | w1 | w2 |
|------------------------|----|----|
| $A \Rightarrow \Box A$ | 0  | 1  |
| $C \Rightarrow \Box C$ | 1  | 1  |
| $\Box \Box A$          | 1  | 1  |
| $\Box 0$               | 0  | 1  |



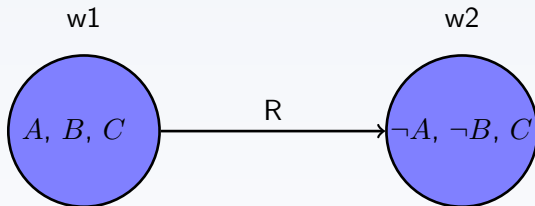
| Formel       | w1 | w2 | w3 |
|--------------|----|----|----|
| $A$          | 1  | 0  | 0  |
| $\Box A$     | 0  | 1  | 1  |
| $\Box C$     | 1  | 1  | 1  |
| $\Diamond B$ | 1  | 0  | 0  |





| Formel       | w1 | w2 | w3 |
|--------------|----|----|----|
| $A$          | 1  | 0  | 0  |
| $\Box A$     | 0  | 1  | 1  |
| $\Box C$     | 1  | 1  | 1  |
| $\Diamond B$ | 1  | 0  | 0  |

| Formel                 | w1 | w2 |
|------------------------|----|----|
| $A \Rightarrow \Box A$ | 0  | 1  |
| $C \Rightarrow \Box C$ | 1  | 1  |
| $\Box \Box A$          | 1  | 1  |
| $\Box 0$               | 0  | 1  |



| Formel                                              | w1 | w2 |
|-----------------------------------------------------|----|----|
| $\Box A \implies \Diamond B$                        |    |    |
| $\Box(\neg A \vee \neg C) \implies B$               |    |    |
| $(A \wedge \Diamond \neg C) \implies B \vee \Box B$ |    |    |

$F$  ist **semantische Folgerung** (logische Konsequenz)  
von  $\{F_1, \dots, F_n\}$ ,  
falls für alle Kripke-Strukturen  $K$  gilt:

Wenn  $K \models \{F_1, \dots, F_n\}$ , dann auch  $K \models F$ .

Notation:  $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$ .

$F$  ist **semantische Folgerung** (logische Konsequenz)  
von  $\{F_1, \dots, F_n\}$ ,  
falls für alle Kripke-Strukturen  $K$  gilt:

Wenn  $K \models \{F_1, \dots, F_n\}$ , dann auch  $K \models F$ .

Notation:  $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$ .

**Beachte:** Kriterium für  $\models$  sind Kripke-Strukturen, nicht Welten.

**Einschränkung:** Nur Modallogiken mit Kripke-Semantik  
werden betrachtet: in  $\models$

Es gibt (inhaltlich) verschiedene Formulierungen des Deduktionstheorems:

- $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$  ist äquivalent zu  $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \implies F$  ist Tautologie.

(Gilt nicht in der aussagenlogischen Modallogik, s.u.)

- $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash F$  ist äquivalent zu  $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \implies F$  ist Tautologie.

Welche Herleitungsrelation  $\vdash$  ??.

Es gibt verschiedene interessante Herleitungsrelationen/-Algorithmen

In der Modallogik gilt das Deduktionstheorem **nicht**:

**Es gilt:** Wenn  $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \implies F$  Tautologie,  
dann gilt auch  $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$

**Umkehrung ist falsch:** (X: Aussagenlog. Variable / Formel?))

$\Diamond X \models \Diamond\Diamond X$  **gilt immer:**

Sei  $K$  Kripke-Struktur mit  $K \models \Diamond X$ .

zu  $w_1$  ex  $w_2$  mit  $w_2 \models X$  und zu  $w_2$  ex  $w_3$  mit  $w_3 \models X$

Also:  $K \models \Diamond\Diamond X$

$\Diamond X \implies \Diamond\Diamond X$  **ist keine Tautologie**

Gegenbeispiel  $K$  besteht aus genau zwei Welten  $w_1, w_2$ , mit  
 $w_1 R w_2$ , aber keine Relation  $R$  für  $w_2$ , wobei  $w_1 \not\models X$ , und  
 $w_2 \models X$ .

Dann gilt:  $w_1 \models \Diamond X$ , aber es gibt keine Welt, die von  $w_1$  aus in  
zwei Schritten erreichbar ist. Also ist  $\Diamond\Diamond X$  falsch in  $w_1$ .

Folgerung aus:

In der Modallogik gilt das Deduktionstheorem **nicht!**

- Man kann Schlussfolgerung **nicht** analog zur Aussagenlogik / Prädikatenlogik implementieren.
- D.h. **nicht** durch Negieren des Theorems und Suche nach Widerspruch.

(kommt noch genauer...)

**Lemma** Wenn  $F$  eine Tautologie ist, dann ist auch  $\Box F$  eine Tautologie.

Das entspricht einer oft verwendeten Deduktionsregel in

Modal-Logik:  $\frac{F}{\Box F}$

(die aber nur für Tautologien verwendet werden darf, oder in Herleitungen aus der leeren Menge von Aussagen)



**Lemma** Wenn  $F$  eine Tautologie ist, dann ist auch  $\Box F$  eine Tautologie.

Das entspricht einer oft verwendeten Deduktionsregel in

Modal-Logik:  $\frac{F}{\Box F}$

(die aber nur für Tautologien verwendet werden darf, oder in Herleitungen aus der leeren Menge von Aussagen)

**Aber:**  $F \implies \Box F$  ist i.a. keine Tautologie.

Z.B.  $A \implies \Box A$  ist i.a. falsch.

unabhängig von Namen.

- $\Box 0$  bzgl einer Welt  $w$  bedeutet, dass dieses  $w$  eine Sackgasse ist:  
von  $w$  aus ist keine Welt mehr erreichbar, denn in keiner Interpretation ist  $0$  wahr.
- Wenn  $\Box\Box\Box 0$  in einer Welt  $w$  wahr ist, dann bedeutet das, dass man von  $w$  aus höchstens 2  $R$ -Schritte machen kann.
- $1$ ,  $\Box 1$  und  $\Box \dots \Box 1$  sind immer Tautologien

- $\Diamond 0$  ???
- Was gilt, wenn  $(\Diamond 1) \wedge (\Box \Diamond 1)$  eine Tautologie ist?

- Es gibt einige automatische Deduktionssysteme für Modallogiken.
- Diese können Tautologien nachweisen; arbeiten analog zu Resolutionsbeweisen.
- Folgerungssysteme; D.h. Berechnen von  $F \models G$ ; benötigen andere Methoden.
- Diese sind parametrisiert mit der benutzten Modallogik-Variante d.h. mit der Klasse der benutzten (erlaubten) Kripke-Strukturen. (siehe weiter unten).

Alle aussagenlogischen Tautologien gelten und z.B.:

$$\begin{array}{lll} \Box(F \wedge G) & \iff & \Box F \wedge \Box G \\ \Diamond(F \vee G) & \iff & \Diamond F \vee \Diamond G \\ \neg(\Box F) & \iff & \Diamond(\neg F) \\ \neg(\Diamond F) & \iff & \Box(\neg F) \\ \Box(F \implies G) & \implies & (\Box F \implies \Box G) \end{array}$$

**Nicht äquivalent** bzgl. aller Kripke-Strukturen (d.h.  $K$ ) sind:

$$\begin{array}{ll} \Diamond(F \wedge G) & \text{und} \quad \Diamond F \wedge \Diamond G \\ \Box(F \vee G) & \text{und} \quad \Box F \vee \Box G \end{array}$$

Prüfung von Tautologien ist **nicht ausreichend!** Also braucht man:

Prüfung von Tautologien ist **nicht ausreichend!** Also braucht man: **Folgerungssystem für normale Modallogiken**

Gegeben  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ , dann sind herleitbar:

- ① Alle aus  $\mathcal{F}$  aussagenlogisch herleitbaren Formeln.
- ② Formeln, die durch Transformationen wie  $\neg\Diamond F \iff \Box\neg F$  aus Formeln aus  $\mathcal{F}$  entstehen.
- ③ Notwendigkeitseinführung: Wenn  $F \in \mathcal{F}$ , und  $F$  wurde nur aus Tautologien (genauer aus dem leeren Anfangs- $\mathcal{F}$ ) hergeleitet, dann kann man  $\Box F$  herleiten.
- ④ (Axiom  $K$ ): Wenn  $\Box(F \implies G) \in \mathcal{F}$ , dann kann man  $(\Box F \implies \Box G)$  herleiten.
- ⑤ **Beweis durch Widerspruch:**  
Wenn man aus  $\mathcal{F} \cup \{G\}$  einen Widerspruch herleiten kann, dann kann man  $\neg G$  aus  $\mathcal{F}$  herleiten.  
z.B.  $\Diamond 0$  ist ein Widerspruch, da Negation der Tautologie  $\Box 1$ .

**Fragen:** korrekt?, vollständig? Komplexität?

Das obige Folgerungssystem erlaubt auch zu folgern

- Alle Tautologien der Modallogik  $K$ .  
(Der Nachweis ist nicht ganz einfach.)
- Zum Beispiel:  
$$(\Box F) \wedge (\Box G) \iff \Box(F \wedge G)$$

und

$$\Box 1.$$
- Widersprüche sind alle Negationen von Tautologien, z.B. auch:  
 $\Diamond 0$  als Negation von  $\Box 1$ .



- Ist das Folgerungssystem vollständig für  $K$ ? vermutlich ja.
- In der Variante für eine parametrisierte Modallogik jedenfalls reicht es aus, um z.B. die richtigen Folgerungen im Beispiel der drei Weisen zu ziehen.

- Folgerungssysteme für andere Varianten der Modallogik:
- Weitere bzw. andere Folgerungsregeln
- Benötigen andere Axiome statt  $K$  bzw. zusätzliche Axiome
- Jeweils zu lösende Aufgabe:
  - Welche Eigenschaften hat die jeweilige Modallogik-Variante
  - Welche Modallogik-Variante passt zu welcher Anwendung?

**Drei Weisen** sitzen sich gegenüber, so dass jeder den anderen von vorne sieht. Jedem wird ein roter oder blauer Punkt auf die Stirn gemalt. Mindestens einer der Punkte ist rot, was den Weisen bekannt ist. Jeder sieht die Stirn der anderen aber nicht seine eigene.

Nach einer Zeit des Überlegens **sagt der erste Weise**: „ Ich weiß nicht, welche Farbe der Punkt auf meiner Stirn hat.“

Nach weiterem Überlegen **sagt der zweite Weise**: „ Ich weiß auch nicht, welche Farbe der Punkt auf meiner Stirn hat.“

Kurz danach **sagt der dritte Weise**: „ Jetzt weiß ich, welche Farbe der Punkt auf meiner Stirn hat“.

Wie kommt er zu dem Schluss und welche Farbe ist es?

$RA$ : „A hat roten Punkt“,  $RB$ : „B hat roten Punkt“,  
 $RC$ : „C hat roten Punkt“.

Formeln, die das Wissen zu der Situation formulieren.

Z.B, Wenn  $RA$  gilt, dann wissen das  $B, C$ :

$$RA \vee RB \vee RC$$

$$RA \implies (\boxed{B} RA) \wedge (\boxed{C} RA)$$

$$\neg RA \implies (\boxed{B} \neg RA) \wedge (\boxed{C} \neg RA)$$

$$RB \implies (\boxed{A} RB) \wedge (\boxed{C} RB)$$

$$\neg RB \implies (\boxed{A} \neg RB) \wedge (\boxed{C} \neg RB)$$

$$RC \implies (\boxed{A} RC) \wedge (\boxed{B} RC)$$

$$\neg RC \implies (\boxed{A} \neg RC) \wedge (\boxed{B} \neg RC)$$

Im Moment noch unbekannt, bzw. nicht hergeleitet:

$\boxed{A}RA$  (A kennt die Farbe seines Punktes.)

$\boxed{B}RB$  (B kennt die Farbe seines Punktes.)

Ziel(e)

$RC$  d.h.  $C$  hat roten Punkt)

$\boxed{C}RC$  d.h.  $C$  weiß: sein Punkt ist rot

- Es gibt verschiedene Formalisierungen und Begründungen
- Es zeigt mehrere Effekte/Ideen
  - Fallunterscheidung ist notwendig
  - Vorsicht bei Schlüssen der Art:
    - jetzt weiss  $B$  bzw.  $C$  folgendes:  
(da man dann zu anderen Welten argumentiert)
  - Man hat den Eindruck, dass man Allgemeinwissen und spezifisches Wissen unterscheiden muss.  
Das hängt aber von der spezifischen Kodierung ab.

**Erster Schritt:** Beweis durch Widerspruch:

Annahme:  $\neg RB \wedge \neg RC$ .

Aus dem Wissen:  $\boxed{A} \neg RB$  und  $\boxed{A} \neg RC$ .

Da auch  $(\boxed{A}(RA \vee RB \vee RC))$  gilt, folgt  $\boxed{A}RA$ ,  
(das  $K$ -Axiom anwenden):

**Widerspruch** zu:  $A \not\models RA$

Also gilt  $RB \vee RC$ .

---

**Erster Schritt:** Beweis durch Widerspruch:

Annahme:  $\neg RB \wedge \neg RC$ .

Aus dem Wissen:  $\boxed{A}\neg RB$  und  $\boxed{A}\neg RC$ .

Da auch  $(\boxed{A}(RA \vee RB \vee RC))$  gilt, folgt  $\boxed{A}RA$ ,  
(das  $K$ -Axiom anwenden):

**Widerspruch** zu:  $A \not\models RA$

Also gilt  $RB \vee RC$ .

---

**Zweiter Schritt**  $\boxed{B}(RB \vee RC)$  herleiten.

(Mit Fallunterscheidung)

Das ist das gleiche wie  $\boxed{B}(\neg RC \implies RB)$ .

---



**Erster Schritt:** Beweis durch Widerspruch:

Annahme:  $\neg RB \wedge \neg RC$ .

Aus dem Wissen:  $\boxed{A} \neg RB$  und  $\boxed{A} \neg RC$ .

Da auch  $(\boxed{A}(RA \vee RB \vee RC))$  gilt, folgt  $\boxed{A} RA$ ,  
(das  $K$ -Axiom anwenden):

**Widerspruch** zu:  $A \not\models RA$

Also gilt  $RB \vee RC$ .

---

**Zweiter Schritt**  $\boxed{B}(RB \vee RC)$  herleiten.

(Mit Fallunterscheidung)

Das ist das gleiche wie  $\boxed{B}(\neg RC \implies RB)$ .

---

Angenommen  $\neg RC$  gilt. Dann kann man herleiten:  $\boxed{B} \neg RC$ ,

und damit  $\boxed{B} RB$ , im Widerspruch zu  $B \not\models RB$ .

Also ist  $RC$  hergeleitet durch Widerspruch.

---

**Erster Schritt:** Beweis durch Widerspruch:

Annahme:  $\neg RB \wedge \neg RC$ .

Aus dem Wissen:  $\boxed{A} \neg RB$  und  $\boxed{A} \neg RC$ .

Da auch  $(\boxed{A}(RA \vee RB \vee RC))$  gilt, folgt  $\boxed{A} RA$ ,  
(das  $K$ -Axiom anwenden):

**Widerspruch** zu:  $A \not\models RA$

Also gilt  $RB \vee RC$ .

---

**Zweiter Schritt**  $\boxed{B}(RB \vee RC)$  herleiten.

(Mit Fallunterscheidung)

Das ist das gleiche wie  $\boxed{B}(\neg RC \implies RB)$ .

---

Angenommen  $\neg RC$  gilt. Dann kann man herleiten:  $\boxed{B} \neg RC$ ,

und damit  $\boxed{B} RB$ , im Widerspruch zu  $B \not\models RB$ .

Also ist  $RC$  hergeleitet durch Widerspruch.

---

Damit gilt auch  $\boxed{C} RC$ .

## Kalendereintrag 14.6.2021

Zwei natürliche Zahlen  $a, b$ ,  $2 \leq a \leq b$ .

- ① Susi und Paul kennen  $a, b$  nicht.
- ② Susi kennt die Summe  $a + b$
- ③ Paul kennt das Produkt  $a * b$

Dann folgen (korrekte) Aussagen in dieser Reihenfolge:

- ① Susi: „ich weiß nicht was  $a$  und  $b$  ist. “
- ② Paul: „ich weiß nicht was  $a$  und  $b$  ist. “
- ③ Susi: „Aha, jetzt weiss ich was  $a$  und  $b$  ist. “
- ④ Paul: „Aha, jetzt weiss ich auch was  $a$  und  $b$  ist. “

Darstellung in Multi-Modallogik?

- ① Susi und Paul kennen  $a, b$  nicht.
- ② Susi kennt die Summe  $a + b$
- ③ Paul kennt das Produkt  $a * b$

Welche Formulierung ist richtig?, oder etwas anderes?

Susi kennt  $a$  nicht:

$(\neg \boxed{\text{Susi}} a)$

oder

$(\not\Box \text{Susi } a)$

??

# Multi-Modallogik: Beispiel, Zahlen in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

- ❶ Susi und Paul kennen  $a, b$  nicht.
- ❷ Susi kennt die Summe  $a + b$
- ❸ Paul kennt das Produkt  $a * b$

Welche Formulierung ist richtig?, oder etwas anderes?

Susi kennt  $a$  nicht:

$(\neg \boxed{\text{Susi}} a)$

oder

$(\not\Box \text{Susi } a)$

??

Die erste Formulierung führt evtl. zu Widersprüchen, wenn das Gegenteil hergeleitet werden kann.

# Multi-Modallogik: Beispiel, Zahlen in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

- ① Susi und Paul kennen  $a, b$  nicht.
- ② Susi kennt die Summe  $a + b$
- ③ Paul kennt das Produkt  $a * b$

Fehler in der Formulierung der Schlüsse?

- ①  $(\neg \boxed{\text{Susi}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Susi}} b$
- ②  $(\neg \boxed{\text{Paul}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Paul}} b$
- ③  $(\boxed{\text{Susi}} (a + b))$
- ④  $(\boxed{\text{Paul}} (a * b))$
- ⑤  $\boxed{\text{Susi}} ((\neg \boxed{\text{Paul}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Paul}} b)$
- ⑥  $\implies \boxed{\text{Susi}} a \wedge \boxed{\text{Susi}} b$
- ⑦  $\boxed{\text{Paul}} ((\neg \boxed{\text{Susi}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Susi}} b)$  und  
 $\boxed{\text{Paul}} (\boxed{\text{Susi}} a \wedge \boxed{\text{Susi}} b)$
- ⑧  $\implies \boxed{\text{Paul}} a \wedge \boxed{\text{Paul}} b$

# Multi-Modallogik: Beispiel, Zahlen in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

- ① Susi und Paul kennen  $a, b$  nicht.
- ② Susi kennt die Summe  $a + b$
- ③ Paul kennt das Produkt  $a * b$

Fehler in der Formulierung der Schlüsse?

- ①  $(\neg \boxed{\text{Susi}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Susi}} b$
- ②  $(\neg \boxed{\text{Paul}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Paul}} b$
- ③  $(\boxed{\text{Susi}} (a + b))$
- ④  $(\boxed{\text{Paul}} (a * b))$
- ⑤  $\boxed{\text{Susi}} ((\neg \boxed{\text{Paul}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Paul}} b)$
- ⑥  $\implies \boxed{\text{Susi}} a \wedge \boxed{\text{Susi}} b$
- ⑦  $\boxed{\text{Paul}} ((\neg \boxed{\text{Susi}} a) \wedge \neg \boxed{\text{Susi}} b)$  und  
 $\boxed{\text{Paul}} (\boxed{\text{Susi}} a \wedge \boxed{\text{Susi}} b)$
- ⑧  $\implies \boxed{\text{Paul}} a \wedge \boxed{\text{Paul}} b$

Charakterisierung einer speziellen Modal-Logik durch  
Rahmenaxiome:

Mittels Eigenschaften der zulässigen Kripke-Rahmen.

Meistens durch Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelation.

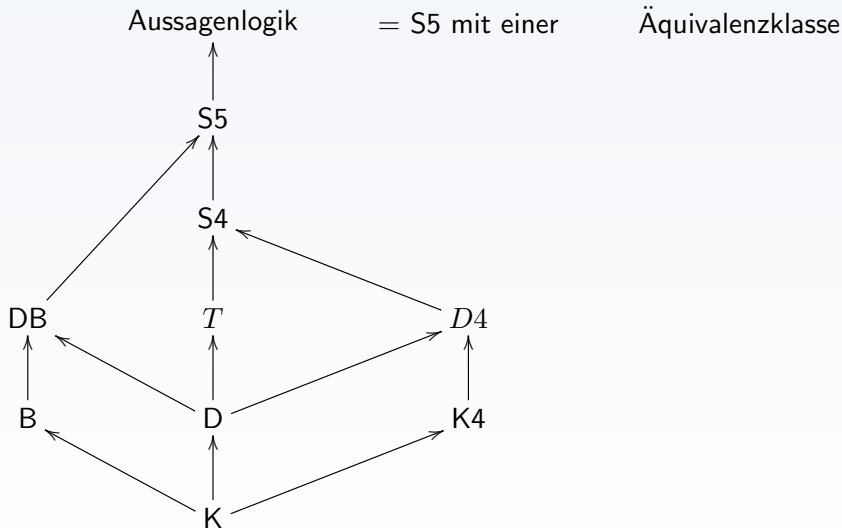


# Modallogik (Kripke): Rahmen-Axiome

| Name der Modallogik<br>(des Axioms) | Eigenschaft der Relation<br>im Rahmen $(W, R)$                                    |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| K                                   | $R$ ist beliebig                                                                  |
| T                                   | $R$ ist reflexiv                                                                  |
| K4                                  | $R$ ist transitiv                                                                 |
| S4                                  | $R$ ist reflexiv und transitiv                                                    |
| B                                   | $R$ ist reflexiv und symmetrisch                                                  |
| S5                                  | $R$ ist reflexiv, transitiv und symmetrisch                                       |
| 5                                   | $R$ ist euklidisch                                                                |
| D                                   | $R$ ist seriell (unbeschränkt)                                                    |
| D4                                  | $R$ ist seriell und transitiv                                                     |
| S4.2                                | $R$ ist reflexiv, transitiv und konfluent                                         |
| Grz                                 | $R$ : jede unendliche $R$ -Kette $w_1 R w_2 \dots$ hat nur endliche viele $w_i$ . |
| Aussagenlogik                       | es gibt genau eine Welt $w_0$ , und $w_0 R w_0$ gilt                              |

|             |                                                                                                                                                |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| reflexiv    | $\forall w : R(w, w)$                                                                                                                          |
| transitiv   | $\forall w_1, w_2, w_3 : w_1 R w_2 \wedge w_2 R w_3 \implies w_1 R w_3$                                                                        |
| symmetrisch | $\forall w_1, w_2 : w_1 R w_2 \implies w_2 R w_1$                                                                                              |
| seriell     | $\forall w \exists w' : w R w'$                                                                                                                |
| euklidisch  | $\forall w_1, w_2, w_3 : w_1 R w_2 \wedge w_1 R w_3 \implies (w_2 R w_3)$                                                                      |
| konfluent   | (falls R reflexiv und transitiv)<br>$\forall w_1, w_2, w_3 : (w_1 R w_2 \wedge w_1 R w_3) \implies (\exists w_4 : w_2 R w_4) \wedge w_3 R w_4$ |

# Abhängigkeiten zwischen einigen Logik-Varianten



Die Pfeile symbolisieren Teilmenge der Tautologien der Logiken.

# Axiomenschemata

| Name (alt. N)                | Formel (Rahmenaxiom)                                                                       | Anwendung                                |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| K                            | $\Box(F \implies G) \implies (\Box F \implies \Box G)$                                     | epistemisch<br>deontisch<br>Zeit; Wissen |
| T (M)                        | $\Box F \implies F$                                                                        |                                          |
| D                            | $\Box F \implies \Diamond F$                                                               |                                          |
| 4                            | $\Box F \implies \Box \Box F$                                                              |                                          |
| B                            | $F \implies \Box \Diamond F$                                                               |                                          |
| 5 (E)                        | $\Diamond F \implies \Box \Diamond F$                                                      | Wissen                                   |
| M (G)                        | $\Box \Diamond F \implies \Diamond \Box F$                                                 |                                          |
| L (H, Lem0)                  | $\Box((A \wedge \Box A) \implies B) \vee$<br>$\Box((B \wedge \Box B) \implies A)$          |                                          |
| 3 ( $H, H_0^+, \text{Lem}$ ) | $\Box(\Box A \implies B) \vee \Box(\Box B \implies A)$                                     |                                          |
| 2 (G)                        | $\Diamond \Box F \implies \Box \Diamond F$                                                 |                                          |
| G (W)                        | $\Box(\Box F \implies F) \implies \Box F$                                                  |                                          |
| Dum                          | $\Box(\Box(F \implies \Box F) \implies F)$<br>$\implies (\Diamond \Box F \implies \Box F)$ |                                          |
| Grz                          | $\Box(\Box(F \implies \Box F) \implies F) \implies F$                                      |                                          |

# Axiomenschemata: Erläuterungen

## epistemische und deontische Logiken

| Name | Formel                                                                           | Erklärung                                                                                   |
|------|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| T    | $\Box F \implies F$                                                              | Was ich weiss, das gilt                                                                     |
| D    | $\Box F \implies \Diamond F$<br>$\Box F \implies \neg \Box \neg F$               | Wenn ich $F$ glaube, dann glaube ich das Gegenteil nicht                                    |
| 4    | $\Box F \implies \Box \Box F$                                                    | Wenn ich $F$ weiß, dann weiß ich dass ich $F$ weiß<br>(Positive Introspektion)              |
| 5    | $\Diamond F \implies \Box \Diamond F$<br>$\neg \Box F \implies \Box \neg \Box F$ | wenn ich $F$ nicht weiß, dann weiß ich dass ich $F$ nicht weiß.<br>(Negative Introspektion) |

(Axiome sind teilweise umgeformt)

## Beispiel Axiom $D$

Annahme. das Axiom  $D$  gilt in allen Welten:  $\Box F \implies \Diamond F$

- Da das immer gilt, d.h. in allen Welten, kann man folgern:
- Sei  $w$  eine Welt.  
Dann gilt  $D$  und  $\Box 1 \implies \Diamond 1$
- In jeder Welt  $w$  gilt  $\Box 1$ ,  
Und das Axiom  $D$ , also auch  $\Diamond 1$ .  
Das bedeutet, es gibt einen Nachfolger der Welt  $w$ .
- Also: Jede Welt hat eine Nachfolge-Welt.

Es gilt auch die Umkehrung:

Wenn in der semantischen Struktur  
jede Welt eine Nachfolge-Welt hat,  
dann gilt der  $D$ :  $\Box F \implies \Diamond F$

Mehr Forschung und Experimente in der Anwendung nötig :

- zum Zusammenhang von Anwendungen und Modallogik-Varianten.
- und zu Herleitungssystemen für Varianten von Modallogiken.