# 9 Tableau Kalkül für $PL_1$

Den aussagenlogischen Tableaukalkül kann man auf PL1 erweitern (siehe [Fit90]). Zu den $\alpha$ (konjunktiven) und $\beta$-Formeln (disjunktiven) kommen noch die Quantorformeltypen $\gamma$ und $\delta$. Bei den $\alpha$- und $\beta$-Formeltypen brauchte man eine Definition der direkten Unterformeln $\alpha_1, \alpha_2$ (bzw. $\beta_1, \beta_2$). Bei quantifizierten Formeln benötigt man Instanzen der Formeln.

| All-quantor | | Ex-quantor | |
|---|---|---|---|
| $\gamma$ | $\gamma(t)$ | $\delta$ | $\delta(t)$ |
| $\forall x : \Phi$ | $\Phi[t/x]$ | $\exists x : \Phi$ | $\Phi[t/x]$ |
| $\neg\exists x : \Phi$ | $\neg\Phi[t/x]$ | $\neg\forall x : \Phi$ | $\neg\Phi[t/x]$ |

## 9.1 Tableau mit Grundtermen

Zunächst eine Variante des Tableau-kalküls, der mit Grundtermen arbeitet.

Im Laufe eines Beweises ist es bei dieser Variante notwendig, neue Konstanten einzuführen. Diese werden auch *Parameter* genannt.

Die Tableau-Erweiterungsregeln, die für die Prädikatenlogik erster Stufe notwendig werden, sind:

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\gamma}{\gamma(t)}$ | $\dfrac{\delta}{\delta(t)}$ |
| $t$ ist geschlossener Term der Parameter enthalten kann | $t$ ist ein neuer Parameter |

Die Eingabe und die Schliessungsregeln sind wie beim aussagenlogischen Tableau. D.h. ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder Pfad geschlossen ist, und dies wiederum heisst, daß in jedem Pfad ein Paar direkt komplementärer Literale vorkommt

*Beispiel 9.1.* Im folgenden ein Tableaubeweis der Formel

$$\big(\forall x : (P(x) \lor Q(x)) \Rightarrow (\exists x : P(x) \lor \forall x : Q(x))\big)$$

Auch hier wird, wie beim aussagenlogischen Tableau, mit der Negation der Formel gestartet.

$$\neg(\forall x : (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x : P(x) \vee \forall x : Q(x)))$$

$$\forall x : (P(x) \vee Q(x))$$

$$\neg(\exists x : P(x) \vee \forall x : Q(x))$$

$$\neg(\exists x : P(x))$$

$$\neg(\forall x : Q(x))$$

$$\neg Q(c) \qquad \delta\text{-Expansion}$$

$$\neg P(c) \qquad \gamma\text{-Expansion mit } t = c$$

$$P(c) \vee Q(c) \qquad \gamma\text{-Expansion mit } t = c$$

$$P(c) \quad | \quad Q(c) \qquad \beta\text{-Expansion}$$

Diese Beweisprozedur terminiert i.a. nicht, im Gegensatz zum aussagenlogischen Tableau, da man für die $\gamma$-Formeln beliebige Terme einsetzen kann, und es auch nicht ausreicht, sich auf eine endliche Menge zu beschränken.

In dieser Form entspricht der Tableaukalkül der Resolution ohne Unifikation, aber mit Raten von Klauselinstanzen. Beim Tableaukalkül bleibt die Struktur der Formeln erhalten, so daß man ohne Normalform und (zunächst) ohne Skolemisierung auskommt.

**Aussage 9.2.** *Das Tableau-Verfahren für PL1 ist widerlegungsvollständig.*

*Im Falle, daß es nicht terminiert, wird in einem Pfad ein Modell generiert, sofern Fairnessbedingungen erfüllt sind: Jede Formel muß in jedem Pfad und mit jeder Regel (insbesondere jede $\gamma$-Instanz) expandiert werden.*

*Beweis.* siehe [Fit90] □

Die Eigenschaft, daß im Falle der Erfüllbarkeit ein Modell erzeugt wird, ist ein Vorteil gegenüber resolutionsbasierten Methoden. Allerdings ist dies eher theoretisch zu sehen, denn i.a. ist der Pfad dann unendlich lang.

Eine einfache Heuristik zum Expandieren des Tableaus ist: zuerst $\alpha$-Regeln, dann $\beta$-Regeln, dann $\delta$-Regeln und dann erst die $\gamma$-Regeln. Es ist auch erlaubt, Mehrfachexpansion von Formeln auf dem gleichen Pfad zu verhindern.

Es ist möglicherweise ausreichend, die $\delta$-Regel pro Formel und Pfad nur einmal zu verwenden. Allerdings gibt es dann immer noch eine Quelle der Nichtterminierung: Jede $\gamma$-Formel muß im Prinzip mit jedem Parameter einmal instantiiert werden. Dies kann darauf hinauslaufen, daß man immer mehr Parameter erzeugen muß: Nach Erzeugung eines neuen Parameters $d$ muss eine Formel oben im Tableau unten neu angehängt werden; Diese ergibt nach einigen Schritten eine neue $\delta$-Formel, die einen neuen Parameter erzeugt, usw.

### 9.2 Tableau mit freien Variablen

Um den ausufernden Nichtdeterminismus der $\gamma$-Regel zu verhindern, kann man Unifikation ausnutzen, muß dazu aber die Datenstruktur des Tableaus leicht verändern, und freie Variablen zulassen.

Gleichzeitig werden statt Parametern Skolemterme bei der Expansion verwendet:

$$\frac{\gamma}{\gamma(x)} \qquad\qquad \frac{\delta}{\delta(f(x_1,\ldots,x_n)}$$

$x$ ist neue freie Variable $\qquad$ $f$ neue Skolemfunktion und

$$x_1,\ldots,x_n$$

sind alle bisher benutzten freien Variablen

**Definition 9.3.** *(Instantiierungsregel) Ein Tableau darf verändert werden, indem man eine Substitution $\sigma$ auf das ganze Tableau anwendet. Hierbei muß die Substitution frei für das Tableau sein. D.h. es werden nur die freien Variablen ersetzt, und die eingesetzten Terme dürfen keine Variablen enthalten, die in den Bindungsbereich eines Quantors geraten (von einem Quantor eingefangen werden).*

Die Schlußregel ist auch hier, daß nach der Instantiierung alle Pfade ein Paar komplementärer Literale enthalten müssen.

Z.B. ist die Substitution $\{x \mapsto f(y)\}$ nicht frei für die Formel $\forall y : P(x, f(x), a, z)$, da das $y$ in $f(y)$ nach der Einsetzung gebunden wäre.

Die Instantiierungsregel und die Schlußregel kann man ersetzen durch eine mit Unifikation kombinierte Schlußregel:

**Definition 9.4.** *Das Tableau ist geschlossen, wenn es eine Substitution $\sigma$ gibt (frei für das Tableau), die das Tableau nach Instantiierung im herkömmlichen Sinne schließt.*

D.h. statt einer Instantiierung macht man einen Unifikationsversuch, der einen Unifikator berechnet, der nach Anwendung alle Pfade gleichzeitig schließt. Dafür muß der Unifikationsalgorithmus geeignete Kandidatenliterale verwenden, und diese unifizieren.

D.h. hier ist doch noch ein Nichtdeterminismus verborgen, da man auf sehr viele Weisen solche Kandidaten auswählen kann.

*Beispiel 9.5.* Im folgenden ein Tableaubeweis mit freien Variablen für die gleiche Formel wie in Beispiel 9.1

$$(\forall x : (P(x) \lor Q(x)) \Rightarrow (\exists x : P(x) \lor \forall x : Q(x)))$$

$$\neg(\forall x : (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x : P(x) \vee \forall x : Q(x)))$$

$$\forall x : (P(x) \vee Q(x))$$

$$\neg(\exists x : P(x) \vee \forall x : Q(x))$$

$$\neg(\exists x : P(x))$$

$$\neg(\forall x : Q(x))$$

$$\neg Q(a) \qquad \delta\text{-Expansion}$$

$$\neg P(y_1) \qquad \gamma\text{-Expansion mit } y_1$$

$$P(y_2) \vee Q(y_2) \qquad \gamma\text{-Expansion mit } y_2$$

$$P(y_2) \quad | \quad Q(y_2) \qquad \beta\text{-Expansion}$$

Geschlossen mit $\sigma = \{y_1 \mapsto a, y_2 \mapsto a\}$

Folgendes Beispiel zeigt, wie ein Modell erzeugt wird:

*Beispiel 9.6.* Betrachte die Formel $(\exists x : P(x)) \Rightarrow (\forall x : P(x))$. Diese ist keine Satz. Versucht man einen Tableaubeweis, so erhält man ein Gegenbeispiel (bzw. ein Modell für die Negation).

$$\neg(\exists x : P(x)) \Rightarrow (\forall x : P(x))$$

$$\exists x : P(x)$$

$$\neg(\forall x : P(x)$$

$$P(a)$$

$$\neg P(b)$$

Das erzeugte Modell hat zwei Elemente: $a, b$. Die Struktur ist $\{P(a), \neg P(b)\}$, und in dieser Struktur ist die obige Formel falsch.

*Beispiel 9.7.* Beweis der Formel

$$(\exists w : \forall x : R(x, w, f(x, w))) \Rightarrow (\exists w : \forall x : \exists y : R(x, w, y))$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \neg\big((\exists w : \forall x : R(x,w,f(x,w))) \Rightarrow (\exists w : \forall x : \exists y : R(x,w,y))\big) & \\
(2) & \exists w : \forall x : R(x,w,f(x,w)) & \\
(3) & \neg(\exists w : \forall x : \exists y : R(x,w,y)) & \\
(4) & \quad \forall x : R(x,a,f(x,a)) & \text{aus (2) mit } \delta \\
(5) & \quad \neg(\forall x : \exists y : R(x,v_1,y)) & \text{aus (3) mit } \gamma \\
(6) & \quad \neg(\exists y : R(g(v_1),v_1,y)) & \text{aus (3) mit } \delta \\
(7) & \quad\quad R(v_2,a,f(v_2,a)) & \text{aus (4) mit } \gamma \\
(8) & \quad\quad \neg(R(g(v_1),v_1,v_3)) & \text{aus (6) mit } \gamma
\end{array}$$

geschlossen mit Unifikator $\sigma = \{v_1 \mapsto a, v_2 \mapsto g(a), v_3 \mapsto f(g(a),a)\}$

Die Frage nach der Terminierung und der Anzahl der notwendigen Kopien wird durch folgendes Beispiel illustriert:

*Beispiel 9.8.* Widerlege die Formelmenge $\{\{P(a) \vee P(b)\}, \{\forall x : \neg P(x)\}\}$.

$$\begin{array}{ll}
(1) & P(a) \vee P(b) \\
(2) & \forall x : \neg P(x) \\
(3) & \quad \neg P(y) \\
(4) & \quad\quad P(a) \quad \mid P(b)
\end{array}$$

Dieses Tableau läßt sich nicht schließen, da $a \neq b$. Erst mit einer weiteren $\gamma$-Expansion der Formel $\forall x : \neg P(x)$ auf dem rechten Pfad ist das Tableau geschlossen.

Eine Umstellung der Expansionen zeigt aber, daß man in diesem Fall mit einer Expansion pro Pfad auskommt.

Vermutlich gilt somit, daß eine $\gamma$-Formel, die keine inneren Disjunktionen enthält, nur einmal pro Pfad expandiert werden muß.

*Beispiel 9.9.* Widerlege die Formelmenge

$$\{\{P(a)\}, \{\neg P(f(f(a)))\}, \{\forall x : P(x) \Rightarrow P(f(x))\}\}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $P(a)$ | | |
| (2) | $\neg P(f(f(a)))$ | | |
| (3) | $\forall x : P(x) \Rightarrow P(f(x))$ | | |
| (4) | $P(y_1) \Rightarrow P(f(y_1))$ | | aus (3) |
| (5) | $\neg P(y_1)$ | $\mid P(f(y_1))$ | |
| (6) | | $P(y_2) \Rightarrow P(f(y_2))$ | aus (3) |
| (6) | | $\neg P(y_2) \quad \mid P(f(y_2))$ | |

Das Tableau ist geschlossen mit $\{y_1 \mapsto a, y_2 \mapsto f(a)\}$.

Man sieht, daß es nicht möglich ist, das Tableau vorher zu schließen bzw. mit nur einer Kopie der Formel $\forall x : P(x) \Rightarrow P(f(x))$ pro Pfad. Eine Erweiterung dieses Beispiels zeigt auch, daß man die Anzahl der notwendigen $\gamma$-Expansionen pro Pfad im Prinzip nicht begrenzen kann. Aufgrund der Unentscheidbarkeit kann man durch keinen Trick die Tableau-methode in ein Entscheidungsverfahren verwandeln. D.h. es gibt immer eine Regel, die für das Nichtterminieren varantwortlich ist.

Die Anzahl der $\delta$-Expansionen kann man auf eine pro Formel und Pfad beschränken. Beschränkt man die Anzahl der erlaubten Kopien pro Formel und Pfad willkürlich von vorneherein durch die sogenannte "Q-Tiefe", dann terminiert das Verfahren.

Die Termininierung kann man wie im aussagenlogischen Fall begründen, wobei man das verwendete Maß leicht variieren muß:

- Basis ist das Paar (Anzahl der Quantoren, Größe der Formel).
- Pro Pfad die Multimenge der obigen Paare, wobei man für jede Formel mit Quantoren das Paar sooft in die Multimenge einfügt, wie man die Formel noch expandieren kann: (Q-Tiefe $-$ wie oft $\gamma$-expandiert). Für $\alpha, \beta, \delta$-Formeln ist diese Zahl jeweils 1.
- Multimenge der Maße aller Pfade.

Unter Beschränkung der Q-Tiefe ist das Verfahren nicht mehr vollständig. Allerdings wird es wieder vollständig, wenn man das Verfahren merhfach ablaufen läßt mit jeweils grösserer Q-Tiefe. Dies ergibt dann ein Semientscheidungsverfahren.