6 Löschregeln: Subsumption, Tautologie und Isoliertheit

Wenn man einen automatischen Beweiser, der nur mit Resolution und Faktorisierung arbeitet, beobachtet, dann wird man sehr schnell zwei Arten von Redundanzen feststellen: Der Beweiser wird Tautologien ableiten, d.h. Klauseln, die ein Literal positiv und negativ enthalten, z.B. $\{P, \neg P, \ldots\}$. Diese Klauseln sind in allen Interpretationen wahr und können daher zur Suche des Widerspruchs (leere Klausel) nicht beitragen. Man sollte entweder ihre Entstehung verhindern oder sie wenigstens sofort löschen. Weiterhin wird der Beweiser Klauseln ableiten, die Spezialisierungen von schon vorhandenen Klauseln sind. Z.B. wenn schon $\{P(x), Q\}$ vorhanden ist, dann ist $\{P(a), Q\}$ aber auch $\{P(y), Q, R\}$, eine Spezialisierung. Alles was man mit diesen (subsumierten) Klauseln machen kann, kann man genausogut oder besser mit der allgemeineren Klausel machen. Daher sollte man subsumierte Klauseln sofort löschen. Es kann auch passieren, daß eine neue abgeleitete Klausel allgemeiner ist als schon vorhandene Klauseln (die neue subsumiert die alte).

Pragmatisch gesehen, muß man auch verhindern, daß bereits hergeleitete und hinzugefügte Resolventen (Faktoren) noch einmal hinzugefügt werden. D.h. eine Buchführung kann sinnvoll sein.

Im folgenden wollen wir uns die drei wichtigsten Löschregeln und deren Wirkungsweise anschauen und deren Vollständigkeit im Zusammenhang mit der Resolution zeigen.

Definition 6.1. Isoliertes Literal
Sei $\mathcal{C}$ eine Klauselmenge, D eine Klausel in $\mathcal{C}$ und L ein Literal In D. L heißt isoliert, *wenn es keine Klausel $D' \neq D$ mit einem Literal L' in $\mathcal{C}$ gibt, so daß L und L' verschiedenes Vorzeichen haben und L und L' unifizierbar sind.*

Die entsprechende Reduktionsregel ist:

Definition 6.2. ISOL: Löschregel für isolierte Literale
Wenn D eine Klausel aus $\mathcal{C}$ ist mit einem isolierten Literal, dann lösche die Klausel D aus $\mathcal{C}$.

Daß diese Regel korrekt ist, kann man mit folgender prozeduralen Argumentation einsehen: Eine Klausel D, die ein isoliertes Literal enthält, kann niemals in einer Resolutionsableitung der leeren Klausel vorkommen, denn dieses Literal kann mittels Resolution nicht mehr entfernt werden und ist deshalb in allen nachfolgenden Resolventen enthalten. Dies gilt auch für eine eventuelle spätere Resolution mit einer Kopie von D. Also kann ein Resolutionsbeweis in der restlichen Klauselmenge gefunden werden. Somit gilt:

Satz 6.3. *Die Löschregel für isolierte Literale kann zum Resolutionskalkül hinzugenommen werden, ohne die Widerlegungsvollständigkeit zu verlieren.*

Die Löschregel für isolierte Literale gehört gewissermaßen zur Grundausstattung von Deduktionssystemen auf der Basis von Resolution. Sie kann mögliche

Eingabefehler finden und kann Resolventen mit isolierten Literalen wieder entfernen. Der Suchraum wird im allgemeinen jedoch nicht kleiner, denn die Eingabeformeln enthalten normalerweise keine isolierten Literale. Das Löschen von Resolventen mit isolierten Literalen ist noch nicht ausreichend. Denn ein nachfolgender Resolutionsschritt könnte genau denselben Resolutionsschritt noch einmal machen. Das Klauselgraphverfahren z.B.hat diese Schwächen nicht.

Beispiel 6.4. Betrachte die Klauselmenge

$$C1 : P(a)$$

$$C2 : P(b)$$

$$C3 : \neg Q(b)$$

$$C4 : \neg P(x), Q(x)$$

Diese Klauselmenge ist unerfüllbar. Am Anfang gibt es keine isolierten Literale. Resolviert man $C1+C4$ so erhält man die Resolvente $\{Q(a)\}$. Das einzige Literal ist isoliert. Somit kann diese Resolvente gleich wieder gelöscht werden. D.h. dieser Versuch war eine Sackgasse in der Suche.

Eine weitere mögliche Redundanz ist die Subsumption

Definition 6.5. *Seien D und E Klauseln. Wir sagen daß D die Klausel E* subsumiert, *wenn es eine Substitution σ gibt, so daß $\sigma(D) \subseteq E$*

D subsumiert E wenn D eine Teilmenge von E ist oder allgemeiner als eine Teilmenge von E ist. Zum Beispiel $\{P(x)\}$ subsumiert $\{P(a), P(b), Q(y)\}$. Daß eine Klausel E, die von D subsumiert wird, redundant ist, kann man sich folgendermaßen klarmachen:

Wenn eine Resolutionsableitung der leeren Klausel irgendwann E benutzt, dann müssen in nachfolgenden Resolutionsschritten die "überflüssigen" Literale wieder wegresolviert werden. Hätte man statt dessen D benutzt, wäre diese extra Schritte überflüssig.

Die entsprechende Reduktionsregel ist:

Definition 6.6. SUBS: Löschregel für subsumierte Klauseln
Wenn D und E Klauseln aus $\mathcal{C}$ sind, D subsumiert E und E hat nicht weniger Literale als D, dann lösche die Klausel E aus $\mathcal{C}$.

Beispiel 6.7.

- P subsumiert $\{P, S\}$.
- $\{Q(x), R(x)\}$ subsumiert $\{R(a), S, Q(a)\}$
- $\{E(a, x), E(x, a)\}$ subsumiert $\{E(a, a)\}$ D.h eine Klausel subsumiert einen ihren Faktoren. In diesem Fall wird nicht gelöscht.

– $\{\neg P(x), P(f(x))\}$ impliziert $\{\neg P(x), P(f(f(x))\}$ aber subsumiert nicht.

Die Subsumptionslöschregel unterscheidet man manchmal noch nach Vorwärts- und Rückwärtsanwendung. *Vorwärtsanwendung* bedeutet, daß man gerade neu erzeugte Klauseln, die subsumiert werden, löscht. *Rückwärtsanwendung* bedeutet, daß man alte Klauseln löscht, die von gerade erzeugten Klausel subsumiert werden. Die Bedingung, daß D nicht weniger Literale als C haben muß, verhindert, daß Elternklauseln ihre Faktoren subsumieren. Die Einschränkung auf das syntaktische Kriterium $\theta(C) \subseteq D$ für Subsumption ist zunächst mal pragmatischer Natur. Es ist nämlich so, daß man die allgemeine Implikation, $C \Rightarrow D$, nicht immer entscheiden kann. Selbst wenn man es entscheiden könnte, wäre es nicht immer geschickt, solche Klauseln zu löschen. Z.B. folgt die Klausel $\{\neg P(x), P(f(f(f(f(f(x))))))\}$ aus der Klausel $\{\neg P(x), Pf(x))\}$. Um eine Widerlegung mit den beiden unären Klauseln $P(a)$ und $\neg P(f(f(f(f(f(a))))))$ zu finden, benötigt man mit der ersten Klausel gerade zwei Resolutionsschritte, während man mit der zweiten Klausel 6 Resolutionsschritte benötigt. Würde man die implizierte Klausel löschen, würde der Beweis also viel länger werden.

Ein praktisches Problem bei der Löschung subsumierter Klauseln ist, daß der Test, ob eine Klausel C eine andere subsumiert, $\mathcal{NP}$-vollständig ist. In der Praxis macht das keine Schwierigkeiten, da man den Subsumptionstest auch unvollständig ausführen kann, indem man nicht alle möglichen Permutationen von Literalen mit gleichem Prädikat ausprobiert.

Um zu zeigen, daß man gefahrlos subsumierte Klauseln löschen kann, d.h. daß man Subsumption zu einem Resolutionsbeweiser hinzufügen kann ohne daß die Widerlegungsvollständigkeit verlorengeht, zeigen wir zunächst ein Lemma.

Lemma 6.8. *Seien D, E Klauseln in der Klauselmenge $\mathcal{C}$, so daß D die Klausel E subsumiert. Dann wird jede Resolvente und jeder Faktor von E von einer Klausel subsumiert, die ableitbar ist, ohne E zu verwenden, wobei statt E die Klausel D oder Faktoren von D verwendet werden.*

Beweis. Faktoren von E werden offensichtlich von D subsumiert. Seien $E = \{K\} \cup E_R$ und $F = \{M\} \cup F_R$, wobei K und M komplementäre Literale sind und sei $R := \tau E_R \cup \tau F_R$ die Resolvente.

Sei $\sigma(D) \subseteq E$.

1. $\sigma(D) \subseteq E_R$.
   Dann ist $\tau\sigma(D) \subseteq F_R$, d.h. D subsumiert die Resolvente R.
2. $D = \{L\} \cup D_R$, $\sigma D_R \subseteq E_R$ und $\sigma(L) = K$
   Die Resolvente von D mit F auf den Literalen L, M und dem allgemeinsten Unifikator μ ist dann $\mu D_R \cup \mu F_R$. Sei τ' die Substitution, die auf E wie $\tau\sigma$ wirkt und auf F wie τ. Diese Definition ist möglich durch Abänderung auf Variablen, da wir stets annehmen, daß verschiedene Klauseln variablendisjunkt sind. Da μ allgemeinst ist, gibt es eine Substitution λ mit $\lambda\mu = \tau'$. Dann ist $\lambda\mu D_R \cup \lambda\mu F_R = \tau\sigma D_R \cup \tau F_R \subseteq \tau E_R \cup \tau F_R$. Also wird die Resolvente Rvon E und F subsumiert von einer Resolvente von D und F.

3. $\sigma D_R \subseteq E$ aber nicht $\sigma D_R \subseteq E_R$.
   Dann ist $D_R = \{L_1, \ldots, L_m\} \cup D'_R$ und $\sigma L_i = \sigma L = K$. Mit einer Argumentation ähnlich zu der in Fall 1 sieht man, daß es einen Faktor D' von D gibt, der L und alle L_i verschmilzt und immer noch E subsumiert. Auf diesen kann dann Fall 1 angewendet werden.

□

Satz 6.9. *Der Resolutionskalkül zusammen mit der Löschung subsumierter Klauseln ist widerlegungsvollständig.*

Beweis. Induktion nach der Länge einer Resolutionsableitung mit Lemma 6.8 als Induktionsschritt und der Tatsache, daß die einzige Klausel, die die leere Klausel subsumiert, selbst nur die leere Klausel sein kann, liefert die Behauptung. □

Definition 6.10. *Sei D eine Klausel. Wir sagen daß D eine* Tautologie *ist, wenn D in allen Interpretationen wahr ist.*

Beispiele für Tautologien sind $\{Pa, \neg Pa\}$, $\{Qa, P(f(x)), \neg P(f(x), Qb\}$ oder $\{Px, \neg Px\}$. Keine Tautologien sind $\{Px, \neg Pf(y)\}$ und $\{\neg P(x,y), P(y,x)\}$. Ein syntaktisches Kriterium zur Erkennung von tautologischen Klauseln ist der Test, ob zwei komplementäre Literale L, L' enthalten sind mit gleichen Atomen. (siehe Beispiel 4.16).

Die entsprechende Reduktionsregel ist:

Definition 6.11. TAUT: Löschregel für tautologische Klauseln
Wenn D eine tautologische Klausel aus der Klauselmenge $\mathcal{C}$ ist, dann lösche die Klausel D aus $\mathcal{C}$.

Da tautologische Klauseln in allen Interpretationen wahr sind, ist die Löschung von Tautologien unerheblich für die Unerfüllbarkeit.

Satz 6.12. *Die Löschregel für tautologische Klauseln ist widerlegungsvollständig.*

Beweis. Hierzu zeigt man, daß ein Beweis, der eine tautologische Klausel benutzt, verkürzt werden kann:

Sei $C = C_1 \vee L \vee \neg L$ eine tautologische Klausel, die im Beweis benutzt wird. Sei $D = D_1 \vee L'$ die Klausel, mit der als nächstes resolviert wird. Wir können annehmen, daß L' und $\neg L$ komplementär sind mit allgemeinstem Unifikator σ. Das Resultat ist $\sigma(C_1 \vee L \vee D_1)$. Diese Resolvente wird von D subsumiert. Mit Lemma 6.8 können wir den Resolutionsbeweis verkürzen, indem D statt dieser Resolvente genommen wird. Mit Induktion können so alle Tautologien aus einer Resolutionsherleitung der leeren Klausel eliminiert werden. □

Es gilt:

Satz 6.13. *Der Resolutionskalkül zusammen mit Löschung subsumierter Klauseln, Löschung von Klauseln mit isolierten Literalen und Löschung von Tautologien ist widerlegungsvollständig.*

Die Löschung von subsumierten Klauseln kann sehr zur Verkleinerung von Suchräumen beitragen. Umgekehrt kann das Abschalten der Subsumptionsregel einen Beweis dadurch praktisch unmöglich machen, daß mehr als 99% aller abgeleiteten Resolventen subsumierte Klauseln sind. Es gibt noch verschiedene destruktive Operationen auf der Menge der Klauseln, die als Zusammensetzung von Resolution, Faktorisierung und Subsumption verstanden werden können. Zum Beispiel gibt es den Fall, daß ein Faktor eine Elternklausel subsumiert, wie in $\{P(x,x), P(x,y)\}$. Faktorisierung zu $\{P(x,x)\}$ und anschließende Subsumptionslöschung kann man dann sehen als Ersetzen der ursprünglichen Klausel durch den Faktor. Diese Operation wird auch *Subsumptionsresolution* genannt. Die Prozedur von Davis und Putnam (siehe Abschnitt 2.6) zum Entscheiden der Unerfüllbarkeit von aussagenlogische Klauselmengen kann man jetzt leicht aus Resolution, Subsumptionsregel, Isolationsregel und Fallunterscheidung zusammenbauen.